Bài 9. Cho tập $F = \left\{ A \in M_2[R] \mid A\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} = 0 \right\}$

1. Chứng tỏ F là không gian con $M_2[\mathbb{R}]$.

2. Tìm cơ sở và số chiều của F.

a, Chứng minh F là không gian con

+ Ta có $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in F \Rightarrow F \neq \Phi$

$+\forall A, B \in F \Rightarrow A\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} = 0, B\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} = 0, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow (\alpha A + \beta B)\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} = (\alpha A)\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} + (\beta B)\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} = \alpha\left(A\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}\right) + \beta\left(B\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}\right) = 0$

$\Rightarrow \alpha A + \beta B \in F$

Vậy F là không gian con

b,

$+\forall A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in F \Rightarrow A\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a + 2b = 0 \\ -a - 2b = 0 \\ c + 2d = 0 \\ -c - 2d = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -2b \\ c = -2d \end{cases}$

$\Rightarrow A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2b & b \\ -2d & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2b & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -2d & d \end{bmatrix} = b\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + d\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$

nên $E = \left\{ \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ là hệ sinh.

Do $\alpha\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \beta\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -2\alpha & \alpha \\ -2\beta & \beta \end{bmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \end{cases}$ suy ra E độc lập tuyến tính.

Vậy E là cơ sở của F và $\dim F = 2$

Bài 15 . Trong $\mathbb{R}^4$ cho tập $F=\left\{(x_1,x_2,x_3,x_4)\in\mathbb{R}^4 \middle| \begin{matrix} x_1-x_3-x_4=0 \\ x_2-x_3+x_4=0 \end{matrix}\right\}$

a. Chứng tỏ F là không gian con của $\mathbb{R}^4$.

b. Tìm cơ sở và số chiều của F.

a, Chứng minh F là không gian con

+ Ta có $\begin{cases} 0-0-0=0 \\ 0-0+0=0 \end{cases} \Rightarrow (0,0,0,0)\in F \Rightarrow F\neq\Phi$

$+\forall x,y\in F, x=(x_1,x_2,x_3,x_4): \begin{vmatrix} x_1-x_3-x_4=0 \\ x_2-x_3+x_4=0 \end{vmatrix}, y=(y_1,y_2,y_3,y_4): \begin{vmatrix} y_1-y_3-y_4=0 \\ y_2-y_3+y_4=0 \end{vmatrix}, \forall\alpha,\beta\in\mathbb{R}$

$\Rightarrow \alpha x+\beta y=\alpha(x_1,x_2,x_3,x_4)+\beta(y_1,y_2,y_3,y_4)=(\alpha x_1+\beta y_1,\alpha x_2+\beta y_2,\alpha x_3+\beta y_3,\alpha x_4+\beta y_4)$

$\Rightarrow \begin{vmatrix} \alpha x_1+\beta y_1-(\alpha x_3+\beta y_3)-(\alpha x_4+\beta y_4)=\alpha(x_1-x_3-x_4)+\beta(y_1-y_3-y_4)=0 \\ \alpha x_2+\beta y_2-(\alpha x_3+\beta y_3)+(\alpha x_4+\beta y_4)=\alpha(x_1-x_3+x_4)+\beta(y_1-y_3+y_4)=0 \end{vmatrix}$

$\Rightarrow \alpha x+\beta y\in F$

Vậy F là không gian con

b,

$+\forall x\in F, x=(x_1,x_2,x_3,x_4): \begin{vmatrix} x_1-x_3-x_4=0 \\ x_2-x_3+x_4=0 \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1=x_3+x_4 \\ x_2=x_3-x_4 \end{cases}$

$\Rightarrow x=(x_1,x_2,x_3,x_4)=(x_3+x_4,x_3-x_4,x_3,x_4)=(x_3,x_3,x_3,0)+(x_4,-x_4,0,x_4)=$

$=x_3(1,1,1,0)+x_4(1,-1,0,1)$

Suy ra $E=\{(1,1,1,0),(1,-1,0,1)\}$ là hệ sinh của F.

Do $\alpha(1,1,1,0)+\beta(1,-1,0,1)=0\Leftrightarrow(\alpha+\beta,\alpha-\beta,\alpha,\beta)=0\Rightarrow\alpha=\beta=0$ nên E độc lập tuyến tính . Vậy E là cơ sở của F suy ra dimF=2