ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN

KHOA CÔNG NGHỆ THÔNG TIN

PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN

(Bài giảng điện tử)

Biên soạn: ThS. Bùi Thị Thanh Xuân

Thái Nguyên - 2010

LỜI NÓI ĐẦU

Phương trình vi phân xuất hiện trên cơ sở phát triển của khoa học, kỹ thuật và những yêu cầu đòi hỏi của thực tế, nó là một bộ môn toán học cơ bản vừa mang tính lý thuyết cao vừa mang tính ứng dụng rộng. Nhiều bài toán cơ học, vật lý dẫn đến sự nghiên cứu các phuơng trình vi phân tương ứng. Ngành toán học này đã góp phần xây dựng lý thuyết chung cho các ngành toán học và khoa học khác. Nó có mặt và góp phần nâng cao tính hấp dẫn lý thú, tính đầy đủ sâu sắc, tính hiệu quả giá trị của nhiều ngành như tối ưu, điều khiển tối ưu, giải tích số, tính toán khoa học,…

THÔNG TIN MÔN HỌC

1. Thông tin môn học

- Tên tiếng Việt: PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN
- Tên tiếng Anh: Differential Equations.
- Số tín chỉ: 2

2. Điều kiện đăng ký môn học

- Môn đã học: Toán cao cấp 1, 2

3. Yêu cầu của môn học

- Sinh viên dự lớp đầy đủ
- Hoàn thành các bài tập được giao
- Có các bài kiểm tra thường xuyên để đánh giá

4. Đánh giá môn học

- Thang điểm đánh giá môn học: thang điểm 10
- Điểm các bài kiểm tra thường xuyên: 30 %
- Điểm thi học phần: 70%

NỘI DUNG MÔN HỌC

- Chương 1 - PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN CẤP MỘT
- Chương 2 - PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN CẤP CAO
- Chương 3 - HỆ PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN
- BÀI TẬP THAM KHẢO
- TÀI LIỆU THAM KHẢO

Chương 1
PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN CẤP MỘT

§ 1 Các khái niệm cơ bản

§ 2 Sự tồn tại và duy nhất nghiệm

§ 3 Phương trình vi phân có biến số phân ly

§ 4 Phương trình vi phân thuần nhất

§ 5 Phương trình tuyến tính cấp một

§ 6 Phương trình vi phân hoàn chỉnh

§ 7 PT vi phân cấp một chưa giải ra đối với đạo hàm

§ 8 Phương pháp tìm nghiệm kỳ dị

§1. Các khái niệm cơ bản

1.1. Định nghĩa

1.2. Trường hướng

1.3. Bài toán Côsi

1.4. Nghiệm tổng quát

1.5. Nghiệm riêng

1.6. Nghiệm kỳ dị

§1 Các khái niệm cơ bản

1.1 Định nghĩa

Phương trình vi phân cấp một có dạng tổng quát là

$$F(x, y, y') = 0 \qquad (1)$$

trong đó $y' = \dfrac{dy}{dx}$

Nghiệm của phương trình (1) là hàm y = y(x) có tính chất là khi thế vào phương trình (1) thì ta được đồng nhất thức. Phương trình (1) có vô số nghiệm. Quá trình tìm các nghiệm của phương trình (1) được gọi là **sự tích phân phương trình** đó.

Nếu từ phương trình (1) ta có thể giải được y', nghĩa là (1) có dạng

$$y' = f(x, y) \qquad (2)$$

thì phương trình (2) được gọi là phương trình cấp một đã giải ra đối với đạo hàm.

1.2 Trường hướng

Giả sử hàm f(x,y) xác định và liên tục trong miền G của mặt phẳng Oxy. Qua điểm (x_0,y_0) thuộc G ta vẽ véc tơ có độ dài bằng 1 và lập với chiều dương của trục hoành một góc α sao cho tgα = $f(x_0,y_0)$. Làm như vậy đối với mọi điểm (x,y) thuộc G chúng ta sẽ nhận được một trường véc tơ được gọi là ***trường hướng***.

Giả sử y = y(x) là một nghiệm của phương trình (2). Khi đó tập hợp những điểm (x,y(x)) sẽ tạo nên một đường cong mà ta gọi là đường cong tích phân của phương trình (2). Như vậy, tại mỗi điểm của đường cong tích phân, hướng tiếp tuyến với đường cong trùng với hướng véc tơ của trường hướng tại điểm đó.

Đường cong mà tại mỗi điểm của nó hướng trường không thay đổi được gọi là đường đẳng phục. Như vậy phương trình của đường đẳng phục có dạng

$$f\left(x,y\right)=k,\quad k=const$$

Đường đẳng phục có thể là đường tích phân nhưng nói chung nó không trùng với đường cong tích phân.

Ví dụ

1.2 Trường hướng

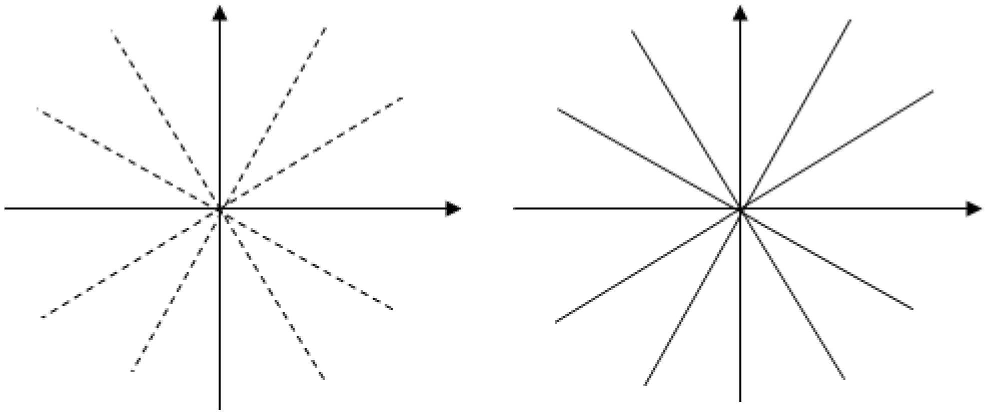
Ví dụ: Xét phương trình $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y}{x}$

ở đây các đường cong tích phân là các nửa đường thẳng

$$y = Cx\left(x \neq 0\right), \quad x = 0\left(y \neq 0\right)$$

C là số thực bất kỳ.

Dễ thấy các đường cong tích phân ở đây cũng là đường đẳng phục.



Hình 1 Hình 2

1.3 Bài toán Côsi

Như trên đã thấy, nghiệm của phương trình vi phân cấp 1 phụ thuộc vào hằng số C tùy ý. Trong thực tế người ta thường không quan tâm đến tất cả các nghiệm của phương trình mà chỉ chú ý đến những nghiệm y(x) của phương trình F(x,y,y') = 0 (1) hoặc y'= f(x,y) (2) thỏa mãn điều kiện

$$y(x_0) = y_0 \qquad (4)$$

trong đó x_0, y_0 là những giá trị cho trước.

Bài toán đặt ra như vậy gọi là ***bài toán Côsi.*** Điều kiện (4) được gọi là điều kiện ban đầu; x_0, y_0 là các giá trị ban đầu.

Về phương diện hình học, bài toán Côsi tương đương với việc tìm đường cong tích phân của phương trình đi qua điểm $M_0(x_0, y_0)$ cho trước.

Bài toán Côsi không phải bao giờ cũng có nghiệm. Sau này chúng ta sẽ thấy với những giả thiết nào thì nghiệm bài toán Côsi tồn tại và duy nhất.

1.4 Nghiệm tổng quát

Giả sử trong miền G của mặt phẳng (x,y) nghiệm của bài toán Côsi đối với phương trình y'= f(x,y) (2) tồn tại và duy nhất. Hàm số

$$y = \varphi(x,C) \qquad (5)$$

được gọi là nghiệm tổng quát của phương trình (2) trong G nếu trong miền biến thiên của x và C, nó có đạo hàm riêng liên tục theo x và thỏa mãn các điều kiện sau:

a. Từ hệ thức (5) ta có thể giải được C: $C = \psi(x,y)$ (6)

b. Hàm $\varphi(x,C)$ thỏa mãn phương trình (2) với mọi giá trị của C xác định từ (6) khi (x,y) biến thiên trong G.

Nếu nghiệm tổng quát của phương trình (2) được cho dưới dạng ẩn

$$\Phi(x,y,C) = 0 \text{ hay } \psi(x,y) = C$$

thì nó được gọi là ***tích phân tổng quát.***

1.5 Nghiệm riêng

Nghiệm của phương trình y'= f(x,y) (2) mà tại mỗi điểm của nó tính duy nhất nghiệm của bài toán Côsi được đảm bảo được gọi là ***nghiệm riêng***. Nghiệm nhận được từ nghiệm tổng quát với giá trị cụ thể của hằng số C là nghiệm riêng.

1.6 Nghiệm kỳ dị

Nghiệm của phương trình y'= f(x,y) (2) mà tại mỗi điểm của nó, tính duy nhất nghiệm của bài toán Côsi bị phá vỡ được gọi là ***nghiệm kỳ dị***.

Như vậy, nghiệm nhận được từ nghiệm tổng quát với giá trị cụ thể của hằng số C không thể cho ta nghiệm kỳ dị. Nghiệm kỳ dị có thể nhận được từ nghiệm tổng quát chỉ khi C = C(x). Ngoài ra chúng ta còn có nghiệm hỗn hợp, tức là nghiệm bao gồm một phần nghiệm riêng và một phần nghiệm kỳ dị.

§2. Sự tồn tại và duy nhất nghiệm

Xét phương trình

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

Khi đó bài toán tìm nghiệm y =y(x) của phương trình sao cho khi $y(x_0) = y_0$ được gọi là bài toán Côsi, ở đây x_0, y_0 là các giá trị tuỳ ý cho trước được gọi là giá trị ban đầu (điều kiện đầu).

Một vấn đề đặt ra là ta hãy xét xem với điều kiện nào thì:

- Bài toán Côsi của phương trình có nghiệm.
- Nghiệm của bài toán là duy nhất.

Giải quyết các vấn đề nêu trên là nội dung của định lý tồn tại và duy nhất nghiệm.

2.1. Định nghĩa

2.2. Định lý

§2 Sự tồn tại và duy nhất nghiệm

2.1 Định nghĩa

Ta nói hàm f(x,y) trong miền G thoả mãn điều kiện Lipsit đối với y nếu tồn tại N > 0 sao cho với bất kỳ $x, \overline{y}, \overline{\overline{y}}$ mà $(x,\overline{y}) \in G, (x,\overline{\overline{y}}) \in G$ thì

$$\left| f(x,\overline{y}) - f(x,\overline{\overline{y}}) \right| \le N \left| \overline{y} - \overline{\overline{y}} \right| \qquad (*)$$

Chú ý:

Bất đẳng thức (*) sẽ thoả mãn nếu $f(x,y), \exists f_y^{'}(x,y)$ giới nội trong G, tức là $\left| f_y^{'}(x,y) \right| \le N \quad \forall (x,y) \in G$. Vì theo Lagrăng ta có:

$$\left| f(x,y) - f(x,\overline{y}) \right| = \left| f_y^{'}(x, y + t(\overline{y} - y)) \right| \left| y - \overline{y} \right| \le N \left| y - \overline{y} \right|$$

Nhưng điều ngược lại không đúng vì có thể (*) thoả mãn nhưng $f_y^{'}(x,y)$ không tồn tại.

2.2 Định lý

Xét phương trình (1) với giá trị ban đầu (x_0, y_0). Giả sử:

1. f(x,y) là hàm liên tục hai biến trong miền kín giới nội G

$$\begin{cases} x_0 - a \le x \le x_0 + a \\ y_0 - b \le y \le y_0 + b \end{cases} \qquad a, b > 0$$

Vì f liên tục trong miền kín giới nội G nên tồn tại M >0 để $|f(x,y)| \le M \quad \forall (x,y) \in G$

2. f(x,y) là hàm thỏa mãn điều kiện Lipsit theo biến y trong miền kín giới nội G

Khi đó tồn tại duy nhất một nghiệm y = y(x) của phương trình (1) xác định và liên tục đối với các giá trị của x thuộc đoạn $x_0 - h \le x \le x_0 + h$ trong đó $h = \min(a, \frac{b}{M})$ sao cho khi $x = x_0$ thì $y(x_0) = y_0$.

§3. Phương trình vi phân có biến số phân ly

3.1. Phương trình dạng M(x)dx + N(y)dy = 0

3.2. Phương trình đưa được về dạng tách biến

3.3. Bài tập tham khảo

§3 PTVP có biến số phân ly

3.1 Phương trình dạng M(x)dx +N(y)dy = 0

a. Phương trình M(x)dx + N(y)dy = 0 (1) được gọi là phương trình vi phân có biến số phân ly (hay phương trình vi phân tách biến), trong đó M(x), N(y) liên tục trong miền nào đó của R.

Khi đó phương trình vi phân (1) có tích phân tổng quát là:

$$\int M(x)dx + \int N(y)dy = C$$

Ví dụ: Giải phương trình vi phân $xdx + ydy = 0$

Đây là phương trình vi phân có biến số phân ly. Khi đó tích phân 2 vế phương trình ta có:

$$\int xdx + \int ydy = C_1$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} = C_1 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = C$$

Tích phân tổng quát của phương trình trên là $x^2 + y^2 = C$

3.1 Phương trình dạng M(x)dx +N(y)dy = 0 (tiếp)

b. Tổng quát hơn, ta xét phương trình có dạng:

$$M(x)N(y)dx + P(x)Q(y)dy = 0 \qquad (2)$$

Trong đó M, N, P, Q là các hàm liên tục theo đối số của chúng trong miền đang xét.

Giả sử N(y)P(x) ≠ 0. Khi đó chia 2 vế của phương trình cho N(y)P(x) ta được:

$$\frac{M(x)}{P(x)}dx + \frac{Q(y)}{N(y)}dy = 0$$

Do đó, tích phân tổng quát của phương trình: $\int \frac{M(x)}{P(x)}dx + \int \frac{Q(y)}{N(y)}dy = C$

Chú ý: Ngoài ra ta còn xét trường hợp N(y)P(x)=0. Những trường hợp $y = y_0$ làm cho N(y) = 0 cũng là nghiệm của phương trình. Nếu muốn tìm cả nghiệm dưới dạng x = x(y) thì những giá trị $x = x_0$ làm P(x) = 0 cũng là nghiệm của phương trình.

Ví dụ: Giải phương trình $x(y^2 - 1)dx + y(x^2 - 1)dy = 0$

§3 PTVP có biến số phân ly

3.1 Phương trình dạng M(x)dx +N(y)dy = 0 (tiếp)

Ví dụ: Giải phương trình $x(y^2-1)dx + y(x^2-1)dy = 0$

Giải: giả sử $(y^2-1)(x^2-1) \neq 0$

$$Pt \Rightarrow \frac{x}{x^2-1}dx + \frac{y}{y^2-1}dy = 0$$

$$\Leftrightarrow \ln\left|x^2-1\right| + \ln\left|y^2-1\right| = \ln\left|C_1\right| \quad (C_1 \neq 0)$$

$$\Leftrightarrow \left|(x^2-1)(y^2-1)\right| = \left|C_1\right|$$

$$\Leftrightarrow (x^2-1)(y^2-1) = C$$

Như vậy, tích phân tổng quát của phương trình này là:

$$(x^2-1)(y^2-1) = C$$

Ngoài ra còn có các nghiệm $y = \pm 1$, $x = \pm 1$.

3.2 Phương trình đưa được về tách biến

Xét phương trình dạng: $$\frac{dy}{dx} = f(ax+by+c)$$

Cách giải:

Đặt $z = ax+by+c \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\frac{dz}{dx} - a}{b}$ hay $\dfrac{dz}{dx} - a = bf(z)$

Đây là phương trình vi phân tách biến.

Ví dụ: Giải phương trình vi phân $\dfrac{dy}{dx} = x - y + 5$

Đặt $z = x - y + 5 \Rightarrow \dfrac{dz}{1-z} = dx \Rightarrow \ln|1-z| = -x + C_1$

$|1-z| = e^{-x}e^{C_1} \Rightarrow 1 - z = Ce^{-x}$ hay $z = 1 - Ce^{-x} \Rightarrow y = Ce^{-x} + x + 4$

Vậy nghiệm của phương trình là: $y = Ce^{-x} + x + 4$ với C là hằng số

3.3 Bài tập Phương trình có biến số phân ly

1. $y'\cos 2y - \sin y = 0$
2. $y' = \dfrac{\cos y - \sin y - 1}{\cos x - \sin x + 1}$
3. $y' = x^2 + 2xy - 1 + y^2$
4. $y' = \dfrac{1}{x - y} + 1$
5. $y' = 1 + \dfrac{1}{y^2}$
6. $y' = (4x + y - 1)^2$
7. $y' = \sqrt{x^2 - y} + 2x$
8. $(1 + y^2)\left[e^{2x}dx - e^y dy\right] - (1 + y)dy = 0$
9. $(xy^2 - y^2 + x - 1)dx + (x^2y - 2xy + x^2 + 2y - 2x + 2)dy = 0$
10. $y' + 1 = \dfrac{(x + y)^m}{(x + y)^n + (x + y)^p}$

§4. Phương trình vi phân thuần nhất

4.1. Phương trình vi phân thuần nhất

4.2. Phương trình đưa được về phương trình thuần nhất

4.3. Bài tập tham khảo

§4 PTVP thuần nhất

4.1 Phương trình vi phân thuần nhất

Hàm số $f(x,y)$ gọi là hàm thuần nhất bậc n nếu $f(tx,ty)=t^n f(x,y)$.

Phương trình vi phân thuần nhất là phương trình có dạng $\dfrac{dy}{dx}=f(x,y)$, trong đó $f(x,y)$ liên tục và là hàm thuần nhất bậc không.

Phương pháp giải phương trình thuần nhất

4.1 Phương trình vi phân thuần nhất

Phương pháp giải:

Đặt $t = \dfrac{1}{x} \Rightarrow f(x, y) = f(1, \dfrac{y}{x}) = \phi(\dfrac{y}{x})$ ta có $\dfrac{dy}{dx} = \phi(\dfrac{y}{x})$ (*)

Đặt $z = \dfrac{y}{x} \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = z + x\dfrac{dz}{dx}$ thế vào phương trình (*) ta có $z + x\dfrac{dz}{dx} = \phi(z)$ hay $\phi(z) - z = x\dfrac{dz}{dx}$

Đây là phương trình tách biến $\dfrac{dz}{\phi(z) - z} = \dfrac{dx}{x}$ với giả thiết $\phi(z) - z \neq 0$. Khi đó:

$$\int \frac{dz}{\phi(z) - z} = \ln|x| + \ln\left|\frac{1}{C_1}\right| = \ln\left|\frac{x}{C_1}\right| \Leftrightarrow \left|\frac{x}{C_1}\right| = e^{\int \frac{dz}{\phi(z) - z}} = e^{\varphi(z)} \text{ hay } x = Ce^{\varphi(z)}.$$

Thay $z = \dfrac{y}{x}$ vào ta được $x = Ce^{\varphi(\frac{y}{x})}$. Đây là nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất.

4.1 Phương trình vi phân thuần nhất

Ví dụ: Giải phương trình $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2xy}{x^2 - y^2}$

Đặt $y = zx$. Khi đó $x\dfrac{dz}{dx} = \dfrac{2z}{1-z^2} - z = \dfrac{z^3 + z}{1 - z^2}$ hay $\dfrac{dx}{x} = \dfrac{(1-z^2)}{z(z^2+1)}dz$

$$\Rightarrow \int \frac{dx}{x} - \int \frac{(1-z^2)}{z(1+z^2)}dz = \int \frac{dx}{x} - \int \frac{dz}{z} + \int \frac{2zdz}{1+z^2} = \ln|C_1|$$

hay $\ln|x| - \ln|z| + \ln|1+z^2| = \ln|C_1| \Leftrightarrow \dfrac{|x|(1+z^2)}{|z|} = |C_1|$ hay $\dfrac{x(1+z^2)}{z} = C$

Thay $z = \dfrac{y}{x}$ vào $\Rightarrow y^2 + x^2 - Cy = 0$. Vậy $x^2 + \left(y - \dfrac{C}{2}\right)^2 = \left(\dfrac{C}{2}\right)^2$.

4.1 Phương trình vi phân thuần nhất

Chú ý:

- Khi giải phương trình vi phân thuần nhất ta không nhất thiết phải đưa về dạng $\phi(\frac{y}{x})$ mà đặt luôn $y = zx$ sau đó biến đổi.
- Nếu $\phi(z) - z = 0$ với $z = z_0$ thì ngoài nghiệm tổng quát còn nghiệm $z = z_0$ hay $y = z_0 x$ cũng là nghiệm. Trong ví dụ trên đường thẳng $y = 0$ cũng là nghiệm của phương trình.

4.2 Phương trình đưa được về phương trình vi phân thuần nhất

Xét phương trình dạng $\dfrac{dy}{dx} = f\left(\dfrac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right)$

Phương pháp giải:

* Giả sử $\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$ dùng phép đổi biến $\begin{cases} x = \xi + h \\ y = \eta + k \end{cases}$ $(h, k = const)$, khi đó phương trình có dạng

$\dfrac{d\eta}{d\xi} = f\left(\dfrac{a_1\xi + b_1\eta + a_1h + b_1k + c_1}{a_2\xi + b_2\eta + a_2h + b_2k + c_2}\right)$. Nếu chọn h, k thoả mãn $\begin{cases} a_1h + b_1k + c_1 = 0 \\ a_2h + b_2k + c_2 = 0 \end{cases}$ thì ta được phương trình thuần nhất $\dfrac{d\eta}{d\xi} = f\left(\dfrac{a_1\xi + b_1\eta}{a_2\xi + b_2\eta}\right)$

* Nếu $\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} = \lambda$. Do đó

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right) = f\left(\frac{\lambda(a_2x + b_2y) + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right).$$

Đặt $z = a_2x + b_2y$ và lập phương trình theo z ta có $\dfrac{dz}{dx} = \phi(z)$ đây là phương trình tách biến.

4.2 Phương trình đưa được về phương trình vi phân thuần nhất

Ví dụ: Giải phương trình $\frac{dy}{dx} = \frac{x+y-3}{x-y-1}$

Ta có $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$.

Đổi biến $\begin{cases} x = \xi + h \\ y = \eta + k \end{cases}$ chọn h,k thoả mãn $\begin{cases} h+k-3=0 \\ h-k-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} h=2 \\ k=1 \end{cases}$.

Ta được phương trình thuần nhất $\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{\xi+\eta}{\xi-\eta}$. Đặt $\eta = u\xi \Rightarrow \xi\frac{du}{d\xi} = \frac{1+u^2}{1-u}$. Phương trình tách biến:

$$arctgu - \frac{1}{2}\ln\left(1+u^2\right) = \ln|\xi| + \ln|C_1|$$

$\Leftrightarrow C\xi\sqrt{1+u^2} = e^{arctgu}$. Khi đó $C\sqrt{(x-2)^2+(y-1)^2} = e^{arctg\frac{y-1}{x-2}}$.

4.3 Bài tập tham khảo

1. $xdy - ydx = \sqrt{x^2 + y^2}dx$
2. $xy' = y - xe^{\frac{y}{x}}$
3. $xy' = y\cos\left(\ln\frac{y}{x}\right) \Rightarrow y' = \frac{y}{x}\cos\left(\ln\frac{y}{x}\right) \qquad z = \frac{y}{x}$
4. $ax^2 + 2bxy + cy^2 + y'\left(bx^2 + 2cxy + f\, y^2\right) = 0$
5. $x^2y'^2 - 3xyy' + 2y^2 = 0$
6. $(2x + y + 1)dx - (4x + 2y - 3)dy = 0$
7. $(xy' + y)^2 = y^2y'$.
8. $y' = \frac{y}{x} + \sin\frac{y}{x}$, với $y(1) = \frac{\pi}{2}$
9. $xyy' + x^2 - 2y^2 = 0$
10. $(3x^2 + y^2)y + (y^2 - x^2)xy' = 0$
11. $xy' = y(1 + \ln y - \ln x), \quad y(1) = e$
12. $y^2 + x^2y' = xyy'$
13. $\left(x - y\cos\frac{y}{x}\right)dx + x\cos\frac{y}{x}dy = 0$

§5. Phương trình vi phân tuyến tính

5.1. Định nghĩa

5.2. Phương pháp biến thiên hằng số Lagrange

5.3. Một số nhận xét về phương trình vi phân tuyến tính

5.4. Các phương trình đưa được về phương trình tuyến tính

5.5. Bài tập tham khảo

§5. PTVP tuyến tính

5.1 Định nghĩa Phương trình vi phân tuyến tính cấp một

Phương trình vi phân tuyến tính là phương trình vi phân tuyến tính đối với hàm và đạo hàm của nó.

Dạng tổng quát: $A(x)\dfrac{dy}{dx} + B(x)y = C(x)$ (1)

trong đó $A(x), B(x), C(x)$ là các hàm liên tục trong khoảng nào đó. Nếu trong khoảng đang xét $A(x) \neq 0 \quad \forall x$ thì phương trình được đưa về dạng:

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x) \qquad (2)$$

Xét phương trình $\dfrac{dy}{dx} + P(x)y = 0$ phương trình này được gọi là phương trình tuyến tính thuần nhất ứng với phương trình đã cho.

Ví dụ: 1. $y' + 4xy = x^2$

2. $y' + 3xy = 0$

Để giải phương trình vi phân tuyến tính cấp một ta sử dụng Phương pháp biến thiên hằng số Lagrange.

5.2 Phương pháp biến thiên hằng số Lagrange

Giải phương trình $\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$ (2)

Bước 1: Xét phương trình $\frac{dy}{dx} + P(x)y = 0$ (3)

Giả sử $y \neq 0$ khi đó phương trình (3) đưa về dạng $\frac{dy}{y} = -P(x)dx$

do đó $\ln|y| = -\int P(x)dx + \ln|C_1|$ $(C_1 \neq 0)$

$\Rightarrow |y| = |C_1| e^{-\int P(x)dx}$ hay $y = Ce^{-\int P(x)dx}$ (4)

Mặt khác $y = 0$ cũng là nghiệm nhưng có thể gộp vào (4) với trường hợp $C = 0$.

Vậy nghiệm tổng quát của phương trình (3) là $y = Ce^{-\int P(x)dx}$ trong đó C là hằng số tuỳ ý.

5.2 Phương pháp biến thiên hằng số Lagrange

Bước 2: Ta thử tìm nghiệm của (2) dưới dạng (4) trong đó coi $C = C(x)$ khi đó

$\frac{dy}{dx} = \frac{dC}{dx}e^{-\int P(x)dx} - p(x)Ce^{-\int P(x)dx}$ thay hệ thức này vào phương trình (2) ta có

$$\frac{dC}{dx}e^{-\int P(x)dx} - P(x)Ce^{-\int P(x)dx} + P(x)Ce^{-\int P(x)dx} = Q(x)$$

do đó $\frac{dC}{dx} = Q(x)e^{\int P(x)dx}$ hay $C = C(x) = \int Q(x)e^{\int P(x)dx} + C_1$. Trong đó C_1 là hằng số tuỳ ý.

Vậy $y = Ce^{-\int P(x)dx} + e^{-\int P(x)dx}\int Q(x)e^{\int P(x)dx}$ (5)

Ví dụ: Giải phương trình $y' - \frac{y}{x} = x^2$ (1)

5.2 Phương pháp biến thiên hằng số Lagrange

Ví dụ: Giải phương trình $y' - \dfrac{y}{x} = x^2 \quad (1)$

Bước 1:

Xét phương trình vi phân thuần nhất tương ứng $y' - \dfrac{y}{x} = 0 \quad (2)$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} \Leftrightarrow \frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}\,(y \neq 0) \Leftrightarrow \int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x} + \ln|C| \quad (C \neq 0)$$

$$\Leftrightarrow \ln|y| = \ln|x| + \ln|C|\,(C \neq 0)$$

$$\Leftrightarrow y = Cx \quad (C \neq 0)$$

Kiểm tra thấy $y = 0$ cũng là nghiệm của phương trình (2).

Do đó nghiệm tổng quát của phương trình (2) là $y = Cx$, với hằng số C tùy ý.

5.2 Phương pháp biến thiên hằng số Lagrange

Ví dụ: Giải phương trình $y' - \dfrac{y}{x} = x^2 \quad (1)$

Bước 2:

Biến thiên hằng số C, coi $C = C(x)$. Khi đó $y' = C'(x)x + C(x)$. Thay vào phương trình (1) ta được:

$$C'(x)x + C(x) - \frac{C(x)x}{x} = x^2$$

$$\Leftrightarrow C'(x)x = x^2 \Leftrightarrow C'(x) = x \Leftrightarrow C(x) = \frac{x^2}{2} + C_1$$

Khi đó thay vào y ta được: $y = \left(\dfrac{x^2}{2} + C_1\right)x = \dfrac{x^3}{2} + C_1 x$, C_1 là hằng số tùy ý.

5.3 Một số nhận xét về phương trình vi phân tuyến tính

a. Nếu biết được một nghiệm riêng của phương trình vi phân tuyến tính không thuần nhất thì việc giải phương trình sẽ quy về việc giải phương trình thuần nhất.

b. Nếu biết được một nghiệm riêng không tầm thường (khác không) của phương trình thuần nhất thì nghiệm tổng quát của phương trình đó có thể tìm mà không cần cầu phương bằng cách nhân nghiệm riêng đã biết với một hằng số tuỳ ý.

c. Nếu biết được hai nghiệm riêng khác nhau của phương trình không thuần nhất thì có thể tìm được nghiệm tổng quát của nó mà không cần cầu phương.

Thật vậy, giả sử $y_1(x), y_2(x)$ là hai nghiệm khác nhau của phương trình không thuần nhất thì ta có thể dễ dàng chứng minh được $y_1(x) - y_2(x)$ là nghiệm không tầm thường của phương trình thuần nhất.

5.4 Phương trình đưa được về phương trình tuyến tính

a. Xét phương trình $f'(y)\dfrac{dy}{dx}+P(x)f(y)=Q(x)$

Bằng phép thế $z=f(y)$ đưa về $\dfrac{dz}{dx}+P(x)z=Q(x)$

Ví dụ 1: Giải phương trình $y\dfrac{dy}{dx}+xy^2=x$

Đặt $z=y^2$ ta có: $z'=2yy'$. Khi đó phương trình đưa về dạng

$\dfrac{z'}{2}+xz=x \Leftrightarrow z'+2xz=2x$ (1) là phương trình vi phân tuyến tính z- hàm , x- biến

Giải phương trình $z'+2xz=2x$ (1)

5.4 Phương trình đưa được về phương trình tuyến tính

Giải phương trình $z' + 2xz = 2x \quad (1)$

Bước 1: Giải phương trình tuyến tính thuần nhất tương ứng $z' + 2xz = 0 \quad (2)$

$\Leftrightarrow \dfrac{dz}{dx} = -2xz$. Giả sử $z \neq 0$ ta có: $\dfrac{dz}{z} = -2xdx \Leftrightarrow \int \dfrac{dz}{z} = -\int 2xdx + \ln|C|, \quad C \neq 0$

$\Leftrightarrow \ln|z| = -x^2 + \ln|C|, \quad C \neq 0$

$\Leftrightarrow z = Ce^{-x^2}, \quad C \neq 0$

Kiểm tra ta thấy $z = 0$ là nghiệm của phương trình (2). Như vậy ta có nghiệm tổng quát của phương trình (2) là $z = Ce^{-x^2}$ với mọi hằng số C tùy ý.

Bước 2:

5.4 Phương trình đưa được về phương trình tuyến tính

Giải phương trình $z' + 2xz = 2x \quad (1)$

Bước 2: Coi $C = C(x)$. Khi đó $z = C(x)e^{-x^2} \Rightarrow z' = C'(x)e^{-x^2} - 2xC(x)e^{-x^2}$. Thay vào phương trình (1) ta có:

$$C'(x)e^{-x^2} - 2xC(x)e^{-x^2} + 2xC(x)e^{-x^2} = 2x$$

$$\Leftrightarrow C'(x)e^{-x^2} = 2x \Leftrightarrow C'(x) = 2xe^{x^2} \Leftrightarrow C(x) = \int 2xe^{x^2}dx$$

$$\Leftrightarrow C(x) = e^{x^2} + C_1$$

Thay vào z ta có: $z = \left(e^{x^2} + C_1\right)e^{-x^2} = 1 + C_1e^{-x^2}$. Như vậy tích phân tổng quát của phương trình là $y^2 = 1 + C_1e^{-x^2}$, với C_1 là hằng số.

Ví dụ 2: Giải phương trình $y' + \tan y = \dfrac{x}{\cos y}$

5.4 Phương trình đưa được về phương trình tuyến tính

b. Phương trình Becnuli

Dạng phương trình $\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)y^{\alpha} \qquad \alpha \in R$

Nếu $\alpha = 0$ ta được phương trình tuyến tính.

Nếu $\alpha = 1$ ta được phương trình tuyến tính thuần nhất

Giả thiết $\alpha \neq 0, \alpha \neq 1$. Chia hai vế của phương trình cho y^{α} $(y \neq 0)$ ta được

$$\frac{1}{y^{\alpha}}\frac{dy}{dx} + P(x)\frac{1}{y^{\alpha-1}} = Q(x)$$

Đổi biến $z = y^{1-\alpha}$ ta có $(1-\alpha)y^{-\alpha}\frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dx}$ và do đó $\frac{1}{1-\alpha}\frac{dz}{dx} + P(x)z = Q(x)$ hay

$\frac{dz}{dx} + (1-\alpha)P(x)z = (1-\alpha)Q(x)$. Đây là phương trình tuyến tính không thuần nhất.

5.4 Phương trình đưa được về phương trình tuyến tính (tiếp)

Ví dụ: Giải phương trình $\frac{dy}{dx} - 4\frac{y}{x} = x\sqrt{y}$

Giả sử $\sqrt{y} \neq 0$ chia hai vế cho $\sqrt{y}$ ta có:

$\frac{dy}{\sqrt{y}dx} - 4\frac{\sqrt{y}}{x} = x \quad (y \neq 0)$. Đặt $z = \sqrt{y}$ do đó $y = z^2$ và $\frac{dy}{dx} = 2z\frac{dz}{dx}$.

Thay vào ta có $\frac{dz}{dx} - \frac{2z}{x} = \frac{x}{2}$. Đây là phương trình tuyến tính đối z - hàm , x- biến.

Giải phương trình ta được nghiệm $y = x^4\left(\frac{1}{2}\ln|x| + C\right)^2$.

Chú ý:

Trường hợp $\alpha > 0$ thì $y = 0$ cũng là nghiệm. Ta có thể chứng minh rằng với $\alpha > 1$ thì $y = 0$ là nghiệm riêng .Nếu $0 < \alpha < 1$ thì $y = 0$ là nghiệm kì dị của phương trình.

5.5 Bài tập tham khảo

Phương trình vi phân tuyến tính

1. $xy' - y = x^2 arctgx$
2. $(1+x^2)y' - 2xy = (1+x^2)^2$
3. $y' + 2xy = xe^{-x^2}$
4. $x(1+x^2)y' - (x^2-1)y + 2x = 0$
5. $y'\sin x - y = 1 - \cos x$
6. $(\sin^2 y + x\cot g\, y)y' = 1$ $\quad x-$ hàm, $y-$ biến
7. $y' + tgy = \dfrac{x}{\cos y}$ $\quad$ Đặt $z = \sin y$
8. $(2e^y - x)y' = 1$ $\quad x-$ hàm, $y-$ biến
9. $(1-2xy)y' = y(y-1)$ $\quad x-$ hàm, $y-$ biến
10. $y' + xy = x^3$
11. $\begin{cases} y' - \dfrac{2}{x}y = \dfrac{3}{x^2} \\ y(1) = 1 \end{cases}$
12. $y' + \dfrac{1}{2x - y^2} = 0$ (coi x là hàm của y)

5.5 Bài tập tham khảo

Phương trình Becnuli

1. $xy' + y = y^2 \ln x$
2. $3y^2 y' - ay^3 = x + 1$
3. $(xy + x^2 y^3)y' = 1$ $\quad x -$ hàm, $y -$ biến
4. $y'x^3 \sin y = x'y - 2y$ $\quad x -$ hàm, $y -$ biến
5. $(x^2 + y^2 + 1)dx + xydy = 0$
6. $(x^2 - 1)y' \sin y + 2x \cos y = 2x - 2x^3$ $\quad$ Đặt $z = \cos y$
7. $x(e^y - y') = 2$ $\quad$ Đặt $z = e^y$
8. $y' - 1 = e^{x+2y}$
9. $(x^2 + y^2 + 2x - 2y)dx + 2(y-1)dy = 0$ $\quad$ Đặt $z = y - 1$
10. $x^2 y' = y(x + y)$ (biến đổi về dạng $y' - \frac{1}{x}y = \frac{1}{x^2}y^2$)
11. $(x+1)(y' + y^2) = -y$
12. $xydy = (y^2 + x)dx$

§6. Phương trình vi phân hoàn chỉnh

6.1. Định nghĩa

6.2. Cách đoán nhận phương trình vi phân hoàn chỉnh

6.3.Thừa số tích phân

6.4. Bài tập tham khảo

§6. PTVP hoàn chỉnh

6.1 Định nghĩa Phương trình vi phân hoàn chỉnh

Phương trình vi phân hoàn chỉnh là phương trình vi phân có dạng

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 \qquad (1)$$

trong đó vế trái của (1) là vi phân toàn phần của một hàm $U(x,y)$ nào đó, tức là

$$dU(x,y) = M(x,y)dx + N(x,y)dy \qquad (2)$$

Khi đó tích phân tổng quát của phương trình là $U(x,y) = C$

Ví dụ: $xdx + ydy = 0$

Ta có $xdx + ydy = d\left[\frac{1}{2}\left(x^2 + y^2\right)\right]$ vì vậy tích phân tổng quát là $x^2 + y^2 = C$

6.2 Cách đoán nhận phương trình vi phân hoàn chỉnh

Định lý: Điều kiện cần và đủ để biểu thức vi phân

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy \qquad (3)$$

Trong đó M, N xác định, liên tục và không đồng thời triệt tiêu tại bất cứ điểm nào trong một miền đơn liên $G \in R^2$ và có trong miền ấy các đạo hàm liên tục $\frac{\partial M}{\partial y}$ và $\frac{\partial N}{\partial x}$, là một vi phân toàn phần của hàm $u(x,y)$ là đẳng thức $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ phải thoả mãn $\forall (x,y) \in G$

Điều kiện cần: Giả sử (3) là vi phân toàn phần tức là $\exists u(x,y)$ sao cho

$$du = Mdx + Ndy = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy \qquad \forall (x,y) \in G$$

$$\Rightarrow M(x,y) = \frac{\partial u}{\partial x}; \quad N(x,y) = \frac{\partial u}{\partial y} \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}; \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$$

do giả thiết $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}; \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$ tồn tại và liên tục nên chúng bằng nhau $\Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$

6.2 Cách đoán nhận phương trình vi phân hoàn chỉnh

§6. PTVP hoàn chỉnh

Điều kiện đủ: Giả sử $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ $\forall (x, y) \in G$ ta cần chứng minh phương trình là phương trình vi phân hoàn chỉnh tức là $\exists u(x, y)$ để

$$M(x, y) = \frac{\partial u}{\partial x} \quad ; \quad N(x, y) = \frac{\partial u}{\partial y} \qquad (5)$$

điều này tương đương chứng minh (5) có nghiệm.

Xét phương trình $\frac{\partial u}{\partial x} = M(x, y)$ nghiệm của nó viết dưới dạng

$$u(x, y) = \int_{x_0}^{x} M(x, y)dx + \phi(y) \qquad (6)$$

Trong đó $\phi(y)$ là một hàm tuỳ ý theo y (tích phân này có nghĩa vì G đơn liên)

Ta sẽ chọn hàm $\phi(y)$ để đẳng thức $N = \frac{\partial u}{\partial y}$ cũng được thoả mãn.

6.2 Cách đoán nhận phương trình vi phân hoàn chỉnh

§6. PTVP hoàn chỉnh

Giả sử $\phi(y)$ là hàm khả vi. Lấy đạo hàm (6) theo y ta có:

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\int_{x_0}^{x} M(x,y)dx+\frac{\partial \phi}{\partial y}=\int_{x_0}^{x}\frac{\partial M}{\partial y}dx+\phi'(y)=N(x,y)$$

$$\Rightarrow \phi'(y)=N(x,y)-\int_{x_0}^{x}\frac{\partial M}{\partial y}dx \qquad (7)$$

Vì $\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}\Rightarrow \phi'(y)=N(x,y)-\int_{x_0}^{x}\frac{\partial N}{\partial x}dx=N(x,y)-N(x,y)+N(x_0,y)=N(x_0,y)$

Vậy $\phi(y)=\int_{y_0}^{y}N(x_0,y)dy+C_1$ (8) trong đó $(x_0,y_0)\in G$

$$\Rightarrow u(x,y)=\int_{x_0}^{x}M(x,y)dx+\int_{y_0}^{y}N(x_0,y)dy+C_1 \qquad (9)$$

Tức là tồn tại hàm $u(x,y)$ thoả mãn (5).

6.2 Cách đoán nhận phương trình vi phân hoàn chỉnh

Ví dụ: Giải phương trình $(7x+3y)dx+(3x-5y)dy=0$

Ta có:

$$M=7x+3y \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y}=3$$

$$N=3x-5y \Rightarrow \frac{\partial N}{\partial x}=3$$

$\Rightarrow$ Đây là phương trình vi phân hoàn chỉnh.

Ta xác định hàm u(x,y). Ta có:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=7x+3y \qquad (*)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=3x-5y \qquad (**)$$

Từ $(*) \Rightarrow u(x,y)=\int(7x+3y)dx+\phi(y) \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial y}=3x+\phi'(y)=3x-5y$

Vậy $\phi(y)=-\frac{5}{2}y^2+C$. Khi đó $u(x,y)=\frac{7}{2}x^2+3xy-\frac{5}{2}y^2+C$.

Phương trình có tích phân tổng quát là: $7x^2+6xy-5y^2=C$.

Bài tập tham khảo

6.2 Cách đoán nhận phương trình vi phân hoàn chỉnh

Chú ý:

1. Từ (9) ta có tích phân tổng quát của phương trình (2) là:

$$\int_{x_0}^{x} M(x,y)dx + \int_{y_0}^{y} N(x_0,y)dy = C \qquad (10)$$

2. Nếu khi tìm hàm $u(x,y)$ mà không xuất phát từ phương trình (5) thì ta sẽ được tích phân tổng quát dạng:

$$\int_{x_0}^{x} M(x,y_0)dx + \int_{y_0}^{y} N(x,y)dy = C \qquad (11)$$

Xét phương trình $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ không phải là phương trình vi phân hoàn chỉnh. Vậy có cách nào để giải phương trình này?

6.3 Thừa số tích phân

Xét phương trình $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ không phải là phương trình hoàn chỉnh

Nếu tồn tại hàm $\mu(x,y)$ sao cho $\mu(x,y)M(x,y)dx + \mu(x,y)N(x,y)dy = 0 \qquad (12)$

là phương trình vi phân hoàn chỉnh thì hàm $\mu(x,y)$ gọi là thừa số tích phân của phương trình.

Tuy nhiên sẽ nảy ra hai vấn đề:

- Có tồn tại thừa số tích phân hay không?
- Nếu tồn tại thừa số tích phân thì tìm hàm $\mu(x,y)$ như thế nào?

Ta có khẳng định sau:

Mọi phương trình vi phân cấp 1 thoả mãn điều kiện tồn tại duy nhất nghiệm luôn luôn tồn tại vô số thừa số tích phân.

6.3 Thừa số tích phân

Mọi phương trình vi phân cấp 1 thoả mãn điều kiện tồn tại duy nhất nghiệm luôn luôn tồn tại vô số thừa số tích phân.

- Xét phương trình $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ (13)

Từ định lý tồn tại và duy nhất nghiệm suy ra phương trình thừa nhận tích phân tổng quát $u(x,y) = C$. Lấy vi phân hai vế ta được

$$\frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy = 0 \text{ hay } \frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial u}{\partial x}}{\frac{\partial u}{\partial y}} \qquad (14)$$

Mặt khác từ (13) $\Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{M(x,y)}{N(x,y)}$ (15)

Do đó từ (14)-(15)

$$\Rightarrow \frac{\frac{\partial u}{\partial x}}{\frac{\partial u}{\partial y}} = \frac{M(x,y)}{N(x,y)} \text{ hay } \frac{\frac{\partial u}{\partial x}}{M(x,y)} = \frac{\frac{\partial u}{\partial y}}{N(x,y)} = \mu(x,y) \qquad (16)$$

6.3 Thừa số tích phân

Ta chứng minh $\mu(x,y)$ là thừa số tích phân của phương trình (13) từ (16) ta suy ra $\frac{\partial u}{\partial x} = \mu(x,y)M(x,y)$; $\frac{\partial u}{\partial y} = \mu(x,y)N(x,y)$

hay $\mu(x,y)M(x,y)dx + \mu(x,y)N(x,y)dy = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy = du$.

Vậy $\mu(x,y)$ là thừa số tích phân.

Ta chứng minh rằng phương trình có vô số thừa số tích phân.

Ta sẽ chứng minh rằng $\mu_1 = \Phi(u)\mu(x,y)$ cũng là thừa số tích phân. Trong đó $\Phi(u)$ là hàm khả vi tuỳ ý.

Thực vậy: từ $\mu Mdx + \mu Ndy = du$

$\Rightarrow \mu\Phi(u)Mdx + \mu\Phi(u)Ndy = \Phi(u)du = d\int \Phi(u)du$. Đây là phương rình vi phân hoàn chỉnh hay $\mu_1(x,y) = \Phi(u)\mu(x,y)$ là thừa số tích phân. Vì $\Phi(u)$ là tuỳ ý suy ra phương trình có vô số thừa số tích phân.

6.3 Thừa số tích phân

***Hệ quả 1**: Mọi thừa số tích phân của phương trình đều có dạng* $\mu_1 = \mu\Phi(u)$.

Giả sử μ_1, μ_2 đều là thừa số tích phân của phương trình

$$\begin{cases} \mu_1 M dx + \mu_1 N dy = du = \dfrac{\partial u}{\partial x}dx + \dfrac{\partial u}{\partial y}dy = 0 \\ \mu_2 M dx + \mu_2 N dy = dv = \dfrac{\partial v}{\partial x}dx + \dfrac{\partial v}{\partial y}dy = 0 \end{cases} \qquad (17)$$

Do đó $\dfrac{\frac{\partial u}{\partial x}}{\frac{\partial v}{\partial x}} = \dfrac{\frac{\partial u}{\partial y}}{\frac{\partial v}{\partial y}}$ hay $\begin{vmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y} \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = 0$.

Vì $\dfrac{\partial v}{\partial y} \neq 0$ nên giữa u và v có sự phụ thuộc, do đó $v = \phi(u)$. Từ (17) suy ra

$$\mu_2 M dx + \mu_2 N dy = dv = \phi'(u)du = \phi'(u)\left(\mu_1 M dx + \mu_1 N dy\right)$$

$$\Rightarrow \mu_2 = \phi'(u)\mu_1 = \Phi(u)\mu_1$$

6.3 Thừa số tích phân

Hệ quả 2*: Nếu biết được hai thừa số tích phân khác nhau của phương trình là μ_1, μ_2 thì tích phân tổng quát của phương trình là* $\dfrac{\mu_1(x,y)}{\mu_2(x,y)} = C$.

Theo chứng minh trên ta có $\begin{matrix} \mu_1 = \Phi_1(u)\mu \\ \mu_2 = \Phi_2(u)\mu \end{matrix} \Rightarrow \dfrac{\mu_1}{\mu_2} = \dfrac{\Phi_1(u)}{\Phi_2(u)} = \Phi(u) = C$

Vấn đề quan tâm tiếp theo là tìm thừa số tích phân như thế nào?

6.3 Thừa số tích phân

Cách tìm thừa số tích phân

Nói chung không có phương pháp tìm thừa số tích phân mà ta chỉ có thể tìm được trong một số trường hợp đặc biệt:

Gọi $\mu(x,y)$ là thừa số tích phân của phương trình khi đó ta có:

$$\frac{\partial}{\partial y}(\mu M) = \frac{\partial}{\partial x}(\mu N) \text{ hay } N\frac{\partial \mu}{\partial x} - M\frac{\partial \mu}{\partial y} = \mu\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right).$$

$$\Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} = N\frac{\partial \ln \mu}{\partial x} - M\frac{\partial \ln \mu}{\partial y} \qquad (18)$$

6.3 Thừa số tích phân

Cách tìm thừa số tích phân

a) Thừa số tích phân chỉ phụ thuộc x $\mu = \mu(x)$. Khi đó $\dfrac{\partial \mu}{\partial y} = 0$.

Từ (18) $\Rightarrow \dfrac{\partial \ln \mu}{\partial x} = \dfrac{\dfrac{\partial M}{\partial y} - \dfrac{\partial N}{\partial x}}{N}$ hay $\ln \mu(x) = \displaystyle\int \dfrac{\dfrac{\partial M}{\partial y} - \dfrac{\partial N}{\partial x}}{N} dx + C$ (19)

Chú ý: $\mu = \mu(x) \Leftrightarrow \dfrac{\dfrac{\partial M}{\partial y} - \dfrac{\partial N}{\partial x}}{N}$ chỉ là hàm của x.

Ví dụ

b) Thừa số tích phân chỉ phụ thuộc y: $\mu = \mu(y)$.

Tương tự $\Rightarrow \dfrac{\partial \ln \mu}{\partial y} = -\dfrac{\dfrac{\partial M}{\partial y} - \dfrac{\partial N}{\partial x}}{M}$ hay $\ln \mu(y) = -\displaystyle\int \dfrac{\dfrac{\partial M}{\partial y} - \dfrac{\partial N}{\partial x}}{M} dy + C$ (20)

Chú ý: $\mu = \mu(y) \Leftrightarrow \dfrac{\dfrac{\partial M}{\partial y} - \dfrac{\partial N}{\partial x}}{M}$ chỉ là hàm của y.

Ví dụ

6.3 Thừa số tích phân

§6. PTVP hoàn chỉnh

Cách tìm thừa số tích phân

Ví dụ: Giải phương trình $(x^2-y)dx+(x^2y^2+x)dy=0$

$$\begin{matrix} M=x^2-y \\ N=x^2y^2+x \end{matrix} \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}=-1-2xy^2-1=-2(xy^2+1)$$

Vì $\dfrac{\dfrac{\partial M}{\partial y}-\dfrac{\partial N}{\partial x}}{N}=-\dfrac{2(xy^2+1)}{x(xy^2+1)}=-\dfrac{2}{x} \Rightarrow \mu=\mu(x)=e^{-2\int\frac{dx}{x}}=\dfrac{1}{x^2}$

Như vậy thừa số tích phân là $\mu(x)=\dfrac{1}{x^2}$

Nhân hai vế của phương trình với $\dfrac{1}{x^2}$ ta có:

$\left(1-\dfrac{y}{x^2}\right)dx+\left(y^2+\dfrac{1}{x}\right)dy=0$ là phương trình vi phân hoàn chỉnh

Phương trình $\Leftrightarrow dx+y^2dy+\dfrac{xdy-ydx}{x^2}=0$

$$\Leftrightarrow d\left[x+\frac{1}{3}y^3+\frac{y}{x}\right]=0 \Leftrightarrow x+\frac{1}{3}y^3+\frac{y}{x}=C$$

6.3 Thừa số tích phân

Cách tìm thừa số tích phân

Ví dụ: Giải phương trình $\left(x^2y^2+y\right)dx+\left(y^2-x\right)dy=0$

$$\begin{aligned} M&=x^2y^2+y \\ N&=y^2-x \end{aligned} \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}=2x^2y+1-(-1)=2\left(x^2y+1\right)$$

$$\text{Vì } \frac{\dfrac{\partial M}{\partial y}-\dfrac{\partial N}{\partial x}}{M}=\frac{2\left(x^2y+1\right)}{y\left(x^2y+1\right)}=\frac{2}{y}\Rightarrow \mu=\mu(y)=e^{-2\int\frac{dy}{y}}=\frac{1}{y^2}$$

Như vậy thừa số tich phân là $\mu(y)=\dfrac{1}{y^2}$

Nhân hai vế của phương trình với $\dfrac{1}{y^2}$ ta có:

$$\left(x^2+\frac{1}{y}\right)dx+\left(1-\frac{x}{y^2}\right)dy=0 \text{ là phương trình vi phân hoàn chỉnh}$$

Phương trình $\Leftrightarrow x^2dx+dy+\dfrac{ydx-xdy}{y^2}=0$

$$\Leftrightarrow d\left[\frac{1}{3}x^3+y+\frac{x}{y}\right]=0 \Leftrightarrow \frac{1}{3}x^3+y+\frac{x}{y}=C$$

6.4 Bài tập tham khảo

Phương trình vi phân toàn phần

1. $\left(\frac{1}{y}\sin\frac{x}{y} - \frac{y}{x^2}\cos\frac{y}{x} + 1\right)dx + \left(\frac{1}{x}\cos\frac{y}{x} - \frac{x}{y^2}\sin\frac{x}{y} + \frac{1}{y^2}\right)dy = 0$
2. $\left(x + e^{\frac{x}{y}}\right)dx + e^{\frac{x}{y}}\left(1 - \frac{x}{y}\right)dy = 0$.
3. $2x\left(1 + \sqrt{x^2 - y}\right)dx - \sqrt{x^2 - y}\,dy = 0$.
4. $\left(x^2 + y^2\right)(xdy - ydx) = (a + x)x^4 dx$.
5. $(x\cos y - y\sin y)dy + (x\sin y + y\cos y)dx = 0$.
6. $\left(x^4 \ln x - 2xy^3\right)dx + 3x^2 y^2 dy = 0$.
7. $y^2 dx + (2xy + 3)dy = 0$
8. $e^x\left(2 + 2x - y^2\right)dx - 2e^x y dy = 0$
9. $\left(y^2 + 1\right)^{3/2} dx + \left(y^2 + 3xy\sqrt{1 + y^2}\right)dy = 0$
10. $\left(y\cos^2 x - \sin x\right)dy = y\cos x(y\sin x + 1)dx$

§7. PTVP cấp một chưa giải ra đối với đạo hàm

7.1 Phương trình F(x, y’) = 0

7.2 Phương trình F(y, y’) = 0

7.3 Phương trình F(x, y, y’) = 0

  7.3.1 Phương trình Lagrăng

  7.3.2 Phương trình Klerô

7.4 Bài tập tham khảo

§7. PTVP cấp một chưa giải ra đối với đạo hàm

7.1 Phương trình F(x,y')=0

a. Trường hợp 1: Phương trình đang xét xác định y' như là hàm ẩn của x và có thể giải ra được $y' = f(x)$.

Khi đó nghiệm nghiệm tìm được bằng một lần cầu phương $y = \int f(x)dx + C$.

b. Trường hợp 2: Từ $F(x, y') = 0$ ta giải ra được x theo y' : $x = \phi(y')$.

Khi đó đặt $y' = P$ xem P là tham số ta được $x = \phi(P)$, vì $\dfrac{dy}{dx} = P \Rightarrow dy = Pdx$

Do $x = \phi(P) \Rightarrow dx = \phi'(P)dP$. Vậy $dy = P\phi'(P)dP \Rightarrow y = \int P\phi'(P)dP + C$.

Nghiệm thu được dưới dạng tham số $\begin{cases} x = \phi(P) \\ y = \int P\phi'(P)dP + C \end{cases}$

§7. PTVP cấp một chưa giải ra đối với đạo hàm

7.1 Phương trình F(x,y')=0

Ví dụ: Giải phương trình $e^{y'} + y' = x$

Đặt $y' = P \Rightarrow x = P + e^P$

Ta có $y = \int P(1 + e^P)dP + C = e^P(P+1) + \dfrac{P^2}{2} + C$

Vậy nghiệm tổng quát: $\begin{cases} x = P + e^P \\ y = e^P(1+P) + \dfrac{P^2}{2} + C \end{cases}$

§7. PTVP cấp một chưa giải ra đối với đạo hàm

7.1 Phương trình F(x,y')=0

c. Trường hợp 3: Từ $F(x,y')=0$ cả x, y' đều biểu diễn bằng một hàm đơn trị

theo tham số $\begin{cases} x=\phi(t) \\ y'=\psi(t) \end{cases}$. Khi đó $y=\int y'dx+C=\int \psi(t)\phi'(t)dt+C$.

Nghiệm tìm được dưới dạng $\begin{cases} x=\phi(t) \\ y=\int \psi(t)\phi'(t)dt+C \end{cases}$

Ví dụ: Giải phương trình $x^3+y'^3-3xy'=0$

7.1 Phương trình F(x,y')=0

Ví dụ: Giải phương trình $x^3 + y'^3 - 3xy' = 0$

Đặt $y' = tx$ thay vào phương trình tìm x theo t

Ta có: $x^3(1+t^3) = 3tx^2$ vậy $x = \dfrac{3t}{1+t^3}$; $y' = \dfrac{3t^2}{1+t^3}$

Khi đó $y = \int y'dx + C = \int \dfrac{3t^2}{1+t^3}\dfrac{3(1+t^3) - 3t.3t^2}{(1+t^3)^2}dt + C = 3\int \dfrac{3t^2(1-2t^3)}{(1+t^3)^3}dt + C$

Đặt $u = t^3 + 1 \Rightarrow y = 3\int \dfrac{3-2u}{u^3}du + C = -\dfrac{9}{2u^2} + \dfrac{6}{u} + C$.

Vậy ta có nghiệm $\begin{cases} x = \dfrac{3t}{1+t^3} \\ y = -\dfrac{9}{2(1+t^3)^2} + \dfrac{6}{1+t^3} + C \end{cases}$

7.2 Phương trình F(y,y')=0

a. Trường hợp 1: Giải được y' theo y: $y' = f(y)$.

Khi đó $dy = f(y)dx \Rightarrow \int \frac{dy}{f(y)} = x + C$.

Ngoài ra giá trị $y = y_0$ mà $f(y) = 0$ cũng là nghiệm của phương trình

7.2 Phương trình F(y,y')=0

b. Trường hợp 2: Giải được y theo y': $y=\phi(y')$

Giả sử ϕ là hàm khả vi liên tục. Đặt $y'=p$ ta có $y=\phi(p)$

Từ $\dfrac{dy}{dx}=p \Rightarrow dx=\dfrac{1}{p}dy=\dfrac{1}{p}\phi'(p)dp \Rightarrow x=\int\dfrac{1}{p}\phi'(p)dp+C$

Vậy nghiệm tổng quát có dạng $\begin{cases} x=\int\dfrac{1}{p}\phi'(p)dp+C \\ y=\phi(p) \end{cases}$

§7. PTVP cấp một chưa giải ra đối với đạo hàm

7.2 Phương trình F(y,y')=0

c. Trường hợp 3: Biểu diễn $\begin{cases} y=\phi(t) \\ y'=\psi(t) \end{cases}$ với giả thiết ϕ là hàm khả vi liên tục và $\psi(t)\neq 0$.

Ta tìm x theo t. Từ $\frac{dy}{dx}=y'=\psi(t)\Rightarrow dx=\frac{1}{\psi(t)}\phi'(t)dt\Rightarrow x=\int\frac{\phi'(t)}{\psi(t)}dt+C$

Vậy nghiệm tổng quát có dạng $\begin{cases} y=\phi(t) \\ x=\int\frac{\phi'(t)}{\psi(t)}dt+C \end{cases}$

7.3 Phương trình F(x,y,y')=0

Giả sử cho phương trình $F(x,y,y')=0$

Giả sử phương trình có thể biểu diễn dưới dạng tham số

$$x=\phi(u,v);\ y=\psi(u,v);\ y'=\lambda(u,v)$$

Nhờ cách biểu diễn tham số này ta có thể đưa việc giải phương trình $F(x,y,y')=0$ về việc giải phương trình đã giải ra đối với đạo hàm.

Ta có $dx=\dfrac{\partial\phi}{\partial u}du+\dfrac{\partial\phi}{\partial v}dv;\ dy=\dfrac{\partial\psi}{\partial u}du+\dfrac{\partial\psi}{\partial v}dv;\ y'=\lambda(u,v)$.

Từ $dy=y'dx\Rightarrow\ \dfrac{\partial\psi}{\partial u}du+\dfrac{\partial\psi}{\partial v}dv=\lambda(u,v)\left[\dfrac{\partial\phi}{\partial u}du+\dfrac{\partial\phi}{\partial v}dv\right]$. Hay nếu coi u là biến và v là hàm thì: $\dfrac{dv}{du}=\dfrac{\lambda\dfrac{\partial\phi}{\partial u}-\dfrac{\partial\psi}{\partial u}}{\dfrac{\partial\psi}{\partial v}-\lambda\dfrac{\partial\phi}{\partial v}}=f(u,v)$ chính là phương trình đã giải ra đối với đạo hàm, giả sử nghiệm tổng quát là $v=\Omega(u,C)$. Khi đó nghiệm tổng quát của $F(x,y,y')=0$ dưới dạng tham số là

$$x=\phi[u,\Omega(u,C)]\ ;\ \ y=\psi[u,\Omega(u,C)].$$

7.3.1 Phương trình Lagrăng

Phương trình tuyến tính đối với x và y có dạng

$$y = \phi(y')x + \psi(y')$$

trong đó giả thiết $\phi(y') \neq y'$ (nếu $\equiv$ là phương trình Klero)

Đặt tham biến: $u = x; v = p = y'$

Khi đó phương trình có dạng $y = \phi(p)x + \psi(p)$

Ta cần tìm x theo p. Từ phương trình $\Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = \phi(p) + [\phi'(p)x + \psi'(p)]\dfrac{dp}{dx} = p$.

Nếu coi x là hàm, p là biến. $\Rightarrow \dfrac{dx}{dp} + \dfrac{\phi'(p)}{\phi(p) - p}x = \dfrac{\psi'(p)}{p - \phi(p)}$

Đây là phương trình tuyến tính không thuần nhất. Giả sử nghiệm tổng quát có dạng: $x = A(p)C + B(p)$ thay vào phương trình ta có $y = A_1(p)C + B_1(p)$.

Đây là nghiệm tổng quát của phương trình Lagrăng dạng tham số.

7.3.1 Phương trình Lagrăng (tiếp)

Ví dụ: Giải phương trình $y = 2xy' + \sin y'$

Đặt $y' = p \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = 2p + 2x\dfrac{dp}{dx} + \cos p\dfrac{dp}{dx} = p$

Hay $\dfrac{dp}{dx}(2x + \cos p) = -p \Rightarrow \dfrac{dx}{dp} = -2\dfrac{x}{p} - \dfrac{\cos p}{p}$ hay $\dfrac{dx}{dp} + 2\dfrac{x}{p} = \dfrac{-\cos p}{p} \quad (p \neq 0)$

Xét $\dfrac{dx}{dp} = -\dfrac{2x}{p} \Rightarrow \ln|x| = -2\ln|p| + \ln|C_1| \Rightarrow x = \dfrac{C}{p^2}$.

Coi $C = C(p)$ thay vào phương trình đầu $\Rightarrow \dfrac{1}{p^2}\dfrac{dC}{dp} = -\dfrac{\cos p}{p}$

hay $C = -\int p\cos p\,dp + C_1 = -p\sin p - \cos p + C_1$.

Vậy phương trình có nghiệm $\begin{cases} x = (-p\sin p - \cos p + C_1)\dfrac{1}{p^2} \\ y = 2px + \sin p \end{cases}$

Ngoài ra phương trình có nghiệm $p = 0$ tức là $y = 0$

7.3.1 Phương trình Lagrăng (tiếp)

Chú ý:

Khi biến đổi phương trình ta phải giả thiết $\phi(p) - p \neq 0$. Dễ thấy rằng các giá trị nghiệm $p = p_i$ cũng là những nghiệm của phương trình. Tuỳ từng trường hợp nghiệm đó có thể là nghiệm riêng hay nghiệm kì dị.

Vì vậy đối với phương trình Lagrăng nghiệm kì dị nếu có chỉ có thể là các đường thẳng $y = p_i x + \psi(p_i)$.

7.3.2 Phương trình Klerô

Phương trình có dạng $y = y'x + \psi(y')$

Đặt $y' = p \Rightarrow y = px + \psi(p) \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = p + \left[x + \psi'(p)\right]\dfrac{dp}{dx} = p$

$$\Rightarrow \left(x + \psi'(p)\right)\frac{dp}{dx} = 0$$

Từ đó ta có nghiệm $p = C$ và $x + \psi'(p) = 0$

Từ $p = C \Rightarrow y = Cx + \psi(C)$. Đây là một họ đường thẳng.

Từ $x = -\psi'(p) \Rightarrow y = -p\psi'(p) + \psi(p)$.

Vậy ta có nghiệm dạng tham số $\begin{cases} x = -\psi'(p) \\ y = -p\psi'(p) + \psi(p) \end{cases}$

7.3.2 Phương trình Klerô (tiếp)

Chú ý:

Người ta chứng minh được rằng nếu $\psi''(p)$ tồn tại và liên tục, $\psi''(p) \neq 0$ thì nghiệm dưới dạng tham số $\begin{cases} x = -\psi'(p) \\ y = -p\psi'(p) + \psi(p) \end{cases}$ là nghiệm kì dị của phương trình. Nó chính là bao hình của họ đường thẳng trên.

Ví dụ: Giải phương trình $y = y'x - \frac{1}{4}y'^2$

Đặt $y' = p \Rightarrow \left(x - \frac{1}{2}p\right)\frac{dp}{dx} = 0$.

* $p = C \Rightarrow y = Cx - \frac{1}{4}C^2$

* $x = \frac{1}{2}p \Rightarrow y = \frac{1}{2}p^2 - \frac{1}{4}p^2 = \frac{1}{4}p^2 = x^2$ là nghiệm kì dị

7.4 Bài tập tham khảo

1. $x'y^3 = 1 + y'$.
2. $y = e^{y'}.y'^2$.
3. $y'^2 x = e^{\frac{1}{y}}$.
4. $y = y'(1 + y'\cos y')$.
5. $y = 2xy' + \sin y'$.
6. $y = \frac{3}{2}xy' + e^{y'}$.
7. $y = 2y'x + y^2 y'^3$ (Nhân hai vế với y, Đặt $z = y^2$)
8. $x = \frac{y}{y'} + \frac{1}{y'^2}$ ($x-$ hàm, $y-$ biến).
9. $xy' - y = \ln y'$.
10. $2y'^2(y - xy') = 1$.

§8. Phương pháp tìm nghiệm kỳ dị

8.1 Phương trình y'= f(x,y)

8.2 Phương trình F(x,y, y') = 0

8.3 Tìm nghiệm kỳ dị từ nghiệm tổng quát

§8. Phương pháp tìm nghiệm kỳ dị

8.1 Phương trình y' = f(x,y)

Nghiệm kì dị chỉ có thể xuất hiện tại những nơi mà điều kiện Lipsit không được thoả mãn. Do đó nghiệm kì dị có thể xuất hiện tại những nơi mà $\frac{\partial f}{\partial y}$ không giới nội. Từ đó ta có thể rút ra quy tắc tìm nghiệm kì dị:

- Tìm những đường cong mà dọc theo nó $\frac{\partial f}{\partial y}$ không giới nội. Giả sử gọi đường cong đó là $y = \phi^*(x)$.
- Thử xem đường cong đó có phải là nghiệm của phương trình vi phân không ?
- Nếu có phải thì thử xem tại mỗi điểm của đường cong tính chất duy nhất nghiệm có bị phá vỡ hay không ? Nếu tính duy nhất bị phá vỡ thì $y = \phi^*(x)$ là nghiệm kì dị.

Ví dụ: Xét phương trình $y' = y^{\frac{2}{3}}$

§8. Phương pháp tìm nghiệm kỳ dị

8.1 Phương trình y' = f(x,y) (tiếp)

Ví dụ: Xét phương trình $y' = y^{\frac{2}{3}}$

Ta có $\dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{2}{3} y^{\frac{-1}{2}}$ $\dfrac{\partial f}{\partial y} = \infty$ khi $y = 0$.

Ta thấy: + $y = 0$ là nghiệm.

+ Nghiệm tổng quát của phương trình vi phân trên là $27y = (x + C)^3$

đây là họ đường Parabol bậc 3, ta thấy tại mọi điểm của $y = 0$ tính chất duy nhất nghiệm bị phá vỡ do đó $y = 0$ là nghiệm kì dị.

8.2 Phương trình F(x,y,y')=0

Giả sử phương trình $F(x,y,y')=0$ xác định một số các giá trị thực y'(hay vô hạn)

$$y' = f_i(x,y) \qquad (i=1,2,...) \quad (*)$$

giả sử $f_i(x,y)$ liên tục và có đạo hàm riêng theo y khi đó lý luận như trên ta có thể tìm được nghiệm kì dị của phương trình (*).

Tuy nhiên trong thực hành để tìm nghiệm kì dị của phương trình (*) ta có thể tính trực tiếp $\frac{\partial f_i}{\partial y}$ như sau:

Ta có: $\frac{\partial f_i}{\partial y} = \frac{\partial y'}{\partial y}$ vi phân phương trình (*) theo y ta được $\frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial y'}\frac{\partial y'}{\partial y} = 0$

$\Rightarrow \frac{\partial y'}{\partial y} = \frac{-\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial y'}} \qquad \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \neq 0\right)$. Ta thấy rằng $\frac{\partial F}{\partial y'} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial y'}{\partial y}$ không giới nội.

Từ đó ta đi đến quy tắc tìm nghiệm kì dị của phương trình (*) như sau:

8.2 Phương trình F(x,y,y') = 0 (tiếp)

Từ đó ta có thể rút ra quy tắc tìm nghiệm kì dị:

- Từ hệ $\begin{cases} F(x,y,y')=0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial y'}=0 \end{cases}$ khử y' ta được hệ thức $R(x,y)=0$ (**).

  Hệ thức (**) gọi là y'– biệt tuyến (hay p biệt tuyến) của phương trình (*)

- Thử xem p biệt tuyến có phải là nghiệm của phương trình (*) hay không?

- Nếu phải thì xem tính chất duy nhất có bị phá vỡ hay không. Nếu có thì p-biệt tuyến là nghiệm kì dị.

8.2 Phương trình F(x,y,y') = 0 (tiếp)

Ví dụ: Tìm nghiệm kì dị của phương trình $F(x,y,y') = y'^2 + y^2 - 1 = 0$

Ta có $\dfrac{\partial F}{\partial y'} = 2y' = 0$ khử y' từ hệ $\begin{cases} y'^2 + y^2 - 1 = 0 \\ 2y' = 0 \end{cases} \Rightarrow y = \pm 1$. Thay $y = \pm 1$ vào phương trình ta thấy nó là nghiệm.

Từ $y' = \pm\sqrt{1-y^2}$ ta có nghiệm $\arcsin y = \pm x + C \Rightarrow y = \sin(\pm x + C)$ hay $y = \sin(x + C)$ (vì $\sin(-x + C) = \sin(x + \pi - C)$).

Ta thấy trên $y = \pm 1$ tính chất duy nhất nghiệm bị phá vỡ $\Rightarrow y = \pm 1$ là nghiệm kì dị.

8.3 Tìm nghiệm kì dị từ nghiệm tổng quát

Giả sử tích phân tổng quát có dạng $\Phi(x,y,C)=0$ ta tìm bao hình của họ nghiệm tổng quát. Muốn vậy trước hết ta tìm C-biệt tuyến từ hệ

$$\begin{cases} \Phi(x,y,C)=0 \\ \dfrac{\partial\Phi(x,y,C)}{\partial C}=0 \end{cases}$$

Ta chứng minh rằng nếu C-biệt tuyến là bao hình của họ nghiệm tổng quát thì nó là nghiệm kì dị của phương trình. Thật vậy:

- ✓ Bao hình là nghiệm: Tại mỗi điểm của bao hình luôn có một đường cong tích phân tiếp xúc suy ra bao hình là nghiệm.
- ✓ Bao hình là nghiệm kì dị: Hiển nhiên.

8.3 Tìm nghiệm kì dị từ nghiệm tổng quát (tiếp)

Quy tắc tìm nghiệm kì dị:

- Tìm C-biệt tuyến của họ đường cong $\Phi(x, y, C) = 0$

$$\begin{cases} \Phi(x,y,C) = 0 \\ \dfrac{\partial \Phi(x,y,C)}{\partial C} = 0 \end{cases} \Rightarrow R(x,y) = 0$$

- Thử xem C-biệt tuyến có phải là bao hình không? Nếu phải thì $R(x,y) = 0$ là nghiệm kì dị.

Chương 2
PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN CẤP CAO

§ 1 Các khái niệm cơ bản

§ 2 Các phương trình giải được bằng cầu phương

§ 3 Phương trình tuyến tính

§1. Các khái niệm cơ bản

1.1. Định nghĩa

1.2. Bài toán Côsi

1.3. Định lý tồn tại và duy nhất nghiệm

1.4. Nghiệm tổng quát

§1 Các khái niệm cơ bản

1.1 Định nghĩa

Nếu x là biến độc lập, y là hàm thì phương trình vi phân cấp cao có dạng tổng quát là $F(x, y, y', ..., y^{(n)}) = 0$ (1)

trong đó nhất thiết $y^{(n)}$ phải có mặt.

Giả sử hàm F liên tục theo tất cả các biến và tại điểm $x = x_0, y^{(k)}(x_0) = y_0^{(k)}$ thoả mãn điều kiện :

1. $F(x_0, y_0, y_0', ..., y_0^{(n)}) = 0$
2. $\dfrac{\partial F}{\partial y^{(n)}} \neq 0$ và liên tục tại điểm $M(x_0, y_0, y_0', ..., y_0^{(n)})$

Khi đó theo định lý tồn tại hàm ẩn, từ (1) ta có thể giải ra trong lân cận điểm $M(x_0, y_0, y_0', ..., y_0^{(n)})$ phương trình

$$y^{(n)} = f(x, y, y', ..., y^{(n-1)}) \qquad (2)$$

Phương trình (2) được gọi là phương trình vi phân cấp n đã giải ra đối với đạo hàm cấp cao nhất.

§1 Các khái niệm cơ bản

1.1 Định nghĩa

Nghiệm của phương trình

Giả sử hàm f xác định và liên tục trong miền biến thiên G nào đó của các biến số $x, y, y', ..., y^{(n-1)}$.

Hàm $y = y(x)$ được gọi là nghiệm của phương trình $y^{(n)} = f(x, y, y', ..., y^{(n-1)})$ trên khoảng (a,b) nếu :

1. Hàm $y(x)$ liên tục và có đạo hàm đến cấp n liên tục trên (a,b) sao cho khi $x \in (a,b)$ thì điểm $\left(x, y(x), y'(x), ..., y^{(n-1)}(x)\right) \in G$;

2. Trên (a,b) với $y = y(x)$ thì phương trình $y^{(n)} = f(x, y, y', ..., y^{(n-1)})$ trở thành đồng nhất thức.

Nghiệm của phương trình (2) $y = f\left(x, y, y', ..., y^{(n-1)}\right)$ có thể tìm dưới dạng ẩn $\Phi(x, y) = 0$ hoặc dưới dạng tham số $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$. Đồ thị của nghiệm được gọi là đường cong tích phân.

1.2 Bài toán Côsi

Hãy tìm nghiệm $y(x)$ của phương trình $y = f\left(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}\right)$ thỏa mãn điều kiện ban đầu :

$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_0', \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$$

trong đó $x_0, y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)}$ là các giá trị cho trước và được gọi là các giá trị ban đầu.

Vấn đề đặt ra là với điều kiện nào thì bài toán Côsi tồn tại và duy nhất nghiệm?

1.3 Định lý tồn tại và duy nhất nghiệm

Xét phương trình $y^{(n)} = f(x, y, y', ..., y^{(n-1)})$ (2)

Định lý:

Cho hệ điều kiện đầu $y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y'_0, .., y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$ và giả sử :

1. Hàm $f(x, y, y', ..., y^{(n-1)})$ liên tục trong miền kín giới nội G

$$|x - x_0| \le a, |y - y_0| \le b, |y' - y'_0| \le b, ..., \left|y^{(n-1)} - y_0^{(n-1)}\right| \le b.$$

Từ đó $\exists M$ sao cho $|f| \le M$ trong G.

2. Hàm f thoả mãn trong G điều kiện Lipsit đối với $y, y', ..., y^{(n-1)}$ tức là $\exists N$ sao cho

$$\left|f(x, \bar{y}, ..., \bar{y}^{(n-1)}) - f(x, \bar{\bar{y}}, ..., \bar{\bar{y}}^{(n-1)})\right| \le N\left(|\bar{y} - \bar{\bar{y}}| + ... + \left|\bar{y}^{(n-1)} - \bar{\bar{y}}^{(n-1)}\right|\right)$$

Khi đó tồn tại duy nhất nghiệm $y(x)$ xác định liên tục trong $|x - x_0| \le h$ với

$h = \min\left(a, \dfrac{b}{\max\left(M, |y|, |y'|, ..., |y^{(n-1)}|\right)}\right)$ và thoả mãn điều kiện ban đầu đã cho.

1.4 Nghiệm tổng quát

Xét phương trình $y^{(n)} = f(x, y, y', ..., y^{(n-1)})$ (2)

Nghiệm tổng quát của phương trình vi phân $y^{(n)} = f(x, y, y', ..., y^{(n-1)})$ trong miền G thoả mãn điều kiện tồn tại duy nhất nghiệm là hàm $\phi(x, C_1, C_2, ..., C_n)$ có đạo hàm riêng liên tục theo x đến cấp n và phụ thuộc vào các hằng số $C_1, C_2, ..., C_n$ sao cho:

1. Từ hệ $\begin{cases} y = \phi(x, C_1, C_2, ..., C_n) \\ y' = \phi'(x, C_1, ..., C_n) \\ .... \\ y^{(n-1)} = \phi_x^{(n-1)}(x, C_1, ..., C_n) \end{cases}$ giải ra các hằng số $C_i = \psi_i(x, y, y', ..., y^{(n-1)})$.

2. Hàm $\phi(x, C_1, C_2, ..., C_n)$ thoả mãn phương trình đang xét với $\forall C_i$ trong miền đang xét.

Tương tự như phương trình vi phân cấp 1 ta có thể đưa ra định nghĩa nghiệm riêng, tích phân tổng quát và nghiệm kì dị của phương trình vi phân cấp cao.

§2. Các phương trình giải được bằng cầu phương

2.1. Phương trình $F(x , y^{(n)}) = 0$

2.2. Phương trình $F(y^{(n-1)} , y^{(n)}) = 0$

2.3. Phương trình $F(y^{(n-2)}, y^{(n)}) = 0$

2.1 Phương trình chỉ chứa biến số và đạo hàm cấp cao nhất

Đó là phương trình có dạng $F(x, y^{(n)}) = 0$ (1)

a) Phương trình (1) ta có thể biểu diễn $y^{(n)}$ qua x: $y^{(n)} = f(x)$ (2)

Giả sử hàm $f(x)$ liên tục trong khoảng (a,b). Khi đó bài toán Côsi có nghiệm duy nhất đối với bất kỳ $x_0 \in (a,b)$ và $y_0, y_0', .., y_0^{(n-1)}$ nhận giá trị bất kỳ.

$$\frac{d}{dx} y^{(n-1)} = f(x)$$

$$y^{(n-1)} = \int_{x_0}^{x} f(x)dx + C_1$$

$$y^{(n-2)} = \int_{x_0}^{x} dx \int_{x_0}^{x} f(x)dx + C_1 x + C_2$$

$$y = \int_{x_0}^{x} dx \int_{x_0}^{x} dx .... \int_{x_0}^{x} f(x)dx + \frac{C_1}{(n-1)!}(x - x_0)^{(n-1)} + ... + C_n$$

§2 Các phương trình giải được bằng cầu phương

2.1 Phương trình chỉ chứa biến số và đạo hàm cấp cao nhất

a) Phương trình (1) ta có thể biểu diễn $y^{(n)}$ qua x: $y^{(n)} = f(x)$ (2)

Nghiệm tổng quát của phương trình (2) là:

$$y = \int_{x_0}^{x} dx \int_{x_0}^{x} dx \dots \int_{x_0}^{x} f(x)dx + \frac{C_1}{(n-1)!}(x-x_0)^{(n-1)} + \dots + C_n$$

Bằng cách áp dụng công thức Đirichlê (đối với tích phân hai lớp) ta được $\int_{x_0}^{x} dx \int_{x_0}^{x} dx \dots \int_{x_0}^{x} f(x)dx = \frac{1}{(n-1)!}\int_{x_0}^{x} f(t)(x-t)^{(n-1)}dt$, Khi đó nghiệm tổng quát được viết dưới dạng:

$$y = \frac{1}{(n-1)!}\int_{x_0}^{x} f(t)(x-t)^{(n-1)}dt + \frac{C_1}{(n-1)!}(x-x_0)^{(n-1)} + \dots + C_n \qquad (*)$$

Chú ý: Số hạng đầu tiên trong (*) cũng là nghiệm riêng của phương trình với $C_i = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n)$.

§2 Các phương giải được bằng cầu phương

2.1 Phương trình chỉ chứa biến số và đạo hàm cấp cao nhất

a) Phương trình (1) ta có thể biểu diễn $y^{(n)}$ qua x: $y^{(n)} = f(x)$ (2)

Ví dụ 1: Tìm nghiệm của phương trình $y''' = \ln x$ khi $x = 1, y = y_0, y' = y'_0, y'' = y''_0$

Áp dụng công thức nghiệm (4) ta có:

$$y = \frac{1}{2!}\int_1^x (x-t)^2 \ln t dt + \frac{y''_0}{2}(x-1)^2 + \frac{y'_0}{1}(x-1) + y_0$$

$$= \frac{1}{6}x^3 \ln x - \frac{11}{36}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}x + \frac{1}{18} + \frac{y''_0}{2}(x-1)^2 + y'_0(x-1) + y_0$$

Ví dụ 2: Tìm nghiệm của phương trình $y'' = xe^x$

Tích phân lần lượt hai vế ta được

$$y = (x-2)e^x + C_1 x + C_2$$

Nghiệm thỏa mãn điều kiện ban đầu $y(0) = 1, y'(0) = 0$ có dạng

$$y = (x-2)e^x + x + 3$$

§2 Các phương trình giải được bằng cầu phương

2.1 Phương trình chỉ chứa biến số và đạo hàm cấp cao nhất

Đó là phương trình có dạng $F(x, y^{(n)}) = 0$ (1)

b. Trường hợp từ phương trình (1) có thể biểu diễn $x, y^{(n)}$ một cách đơn trị theo t,

$\begin{cases} x = \phi(t) \\ y^{(n)} = \psi(t) \end{cases}$, trong đó $\phi(t)$ có đạo hàm liên tục, $\psi(t)$ liên tục.

Ta sẽ biểu diễn y theo t.

Vì $dy^{(n-1)} = y^{(n)}dx = \psi(t)\phi'(t)dt$ ta có

$$y^{(n-1)} = \int \psi(t)\phi'(t)dt + C_1 = \psi_1(t, C_1)$$

$$\Rightarrow dy^{(n-2)} = y^{(n-1)}dx = \psi_1(t, C_1)\phi'(t)dt$$

$$\Rightarrow y^{(n-2)} = \int \psi_1'(t, C_1)\phi'(t)dt + C_2 = \psi_2(t, C_1, C_2)$$

......

$$y = \psi_n(t, C_1, C_2, \ldots, C_n).$$

§2 Các phương trình giải được bằng cầu phương

2.1 Phương trình chỉ chứa biến số và đạo hàm cấp cao nhất

b. Trường hợp từ phương trình (1) có thể biểu diễn $x, y^{(n)}$ một cách đơn trị theo t,

$\begin{cases} x = \phi(t) \\ y^{(n)} = \psi(t) \end{cases}$, trong đó $\phi(t)$ có đạo hàm liên tục, $\psi(t)$ liên tục.

Vậy nghiệm tổng quát của phương trình có dạng $\begin{cases} x = \phi(t) \\ y = \psi_n(t, C_1, C_2, ..., C_n) \end{cases}$

§2 Các phương trình giải được bằng cầu phương

2.1 Phương trình chỉ chứa biến số và đạo hàm cấp cao nhất

b. Trường hợp từ phương trình (1) có thể biểu diễn $x, y^{(n)}$ một cách đơn trị theo t,

$\begin{cases} x = \phi(t) \\ y^{(n)} = \psi(t) \end{cases}$, trong đó $\phi(t)$ có đạo hàm liên tục, $\psi(t)$ liên tục.

Ví dụ 1: Giải phương trình $e^{y''} + y'' = x$

Ví dụ 2: Giải phương trình $x - e^{y''} + y''^2 = 0$

§2 Các phương trình giải được bằng cầu phương

2.1 Phương trình chỉ chứa biến số và đạo hàm cấp cao nhất

Ví dụ 1: Giải phương trình $e^{y''} + y'' = x$

Phương trình viết dưới dạng tham số là: $\begin{cases} x = e^t + t \\ y'' = t \end{cases}$

Do đó $dy' = y''dx = t(e^t + 1)dt \Rightarrow y' = (t-1)e^t + \dfrac{t^2}{2} + C_1$

$$dy = y'dx = \left[(t-1)e^t + \frac{t^2}{2} + C_1\right](e^t + 1)dt$$

$$\Rightarrow y = \int \left[(t-1)e^t + \frac{t^2}{2} + C_1\right](e^t + 1)dt + C_2 .$$

Vậy nghiệm phương trình là $\begin{cases} x = e^{t+1} \\ y = \left(\dfrac{t}{2} - \dfrac{3}{4}\right)e^{2t} + \left(\dfrac{t^2}{2} - 1 + C_1\right)e^t + \dfrac{t^2}{6} + C_1 t + C_2 \end{cases}$

§2 Các phương trình giải được bằng cầu phương

2.1 Phương trình chỉ chứa biến số và đạo hàm cấp cao nhất

Ví dụ 2: Giải phương trình $x - e^{y''} + y''^2 = 0$

Gợi ý: Đặt $y'' = t$ ta có $\begin{cases} x = e^t - t^2 \\ y'' = t \end{cases}$

Nghiệm tổng quát của phương trình

$$\begin{cases} x = e^t - t^2 \\ y = \left(\frac{t}{2} - \frac{3}{4}\right)e^{2t} - \left(\frac{2}{3}t^3 - 2t + 2 - C_1\right)e^t + \frac{4}{15}t^5 - C_1 t^2 + C_2 \end{cases}$$

2.2 Phương trình $F(y^{(n-1)}, y^{(n)}) = 0$

a. Xét trường hợp từ phương trình $F(y^{(n-1)}, y^{(n)}) = 0$ có thể giải ra $y^{(n)} = f(y^{(n-1)})$

Đặt $z = y^{(n-1)}$ ta được $z' = f(z)$ đó là phương trình tách biến.

+ Giải phương trình ta được $z = \omega(x, C_1) \Leftrightarrow y^{(n-1)} = \omega(x, C_1)$

Ta trở về trường hợp phương trình (1) trường hợp a).

+ Nếu không giải được ra $z = \omega(x, C_1)$ nhưng biểu diễn được dạng tham số

$\begin{cases} x = \phi(t) \\ z = \psi(t) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \phi(t) \\ y^{(n-1)} = \psi(t) \end{cases}$ và ta trở về phương trình (1) trường hợp b) đã biết cách giải.

2.2 Phương trình $F(y^{(n-1)}, y^{(n)}) = 0$

b. Nếu phương trình (3) biểu diễn đơn trị theo tham số t $\begin{cases} y^{(n-1)} = \phi(t) \\ y^{(n)} = \psi(t) \end{cases}$

Từ $dy^{(n-1)} = y^{(n)}dx \Rightarrow \phi'(t)dt = \psi(t)dx \Rightarrow dx = \dfrac{\phi'(t)dt}{\psi(t)}$

Do đó $x = \displaystyle\int \frac{\phi'(t)dt}{\psi(t)} + C_1 \Rightarrow x = \phi_1(t, C_1)$. Khi đó

$$y^{(n-2)} = \int y^{(n-1)}dx = \int \frac{\phi(t)\phi'(t)}{\psi(t)}dt + C_2 = \psi_1(t, C_2)$$

...

$$y = \psi_{n-1}(t, C_2, ..., C_n)$$

Ta nhận được nghiệm tổng quát của phương trình dạng tham số:

$$\begin{cases} x = \phi_1(t, C_1) \\ y = \psi_{(n-1)}(t, C_2, ..., C_n) \end{cases}$$

2.2 Phương trình $F(y^{(n-1)}, y^{(n)}) = 0$

b. Nếu phương trình (3) biểu diễn đơn trị theo tham số t $\begin{cases} y^{(n-1)} = \phi(t) \\ y^{(n)} = \psi(t) \end{cases}$

Ví dụ: Xét phương trình $ay'' = -\left(1+y'^2\right)^{\frac{3}{2}}$

Đặt $z = y' \Rightarrow az' = -\left(1+z^2\right)^{\frac{3}{2}}$ hay $\dfrac{dz}{\left(1+z^2\right)^{\frac{3}{2}}} = -\dfrac{1}{a}dx$

$\Rightarrow -\dfrac{x}{a} = \displaystyle\int \frac{dz}{(1+z^2)^{\frac{3}{2}}} + C_1$. Đặt $z = tg\phi \Rightarrow \displaystyle\int \frac{dz}{(1+z^2)\sqrt{1+z^2}} = \sin\phi$

Vậy ta có nghiệm tổng quát là: $\begin{cases} x = -a\sin\phi + C_1 \\ y = a\cos\phi + C_2 \end{cases}$

Hay $(x - C_1)^2 + (y - C_2)^2 = a^2$

2.3 Phương trình $F(y^{(n-2)}, y^{(n)}) = 0$

$$F(y^{(n-2)}, y^{(n)}) = 0 \qquad (4)$$

a. Nếu từ phương trình (4) suy ra $y^{(n)} = f(y^{(n-2)})$

2.3 Phương trình $F(y^{(n-2)}, y^{(n)}) = 0$

$$F(y^{(n-2)}, y^{(n)}) = 0 \qquad (4)$$

a. Nếu từ phương trình (4) suy ra $y^{(n)} = f(y^{(n-2)})$

Ta đặt $z = y^{(n-2)} \Rightarrow z'' = f(z)$. Nhân cả hai vế với $2z'$ $(z' \neq 0)$ ta được

$2z'z'' = 2z'f(z)$ hay $d(z'^2) = 2f(z)dz \Rightarrow z'^2 = \int 2f(z)dz + C_1$.

Vậy $z' = \pm\sqrt{2\int f(z)dz + C_1}$ hay $dz = \pm\sqrt{2\int f(z)dz + C_1}\,dx$.

$$\Rightarrow dx = \frac{dz}{\pm\sqrt{2\int f(z)dz + C_1}} \Rightarrow x + C_2 = \int \frac{dz}{\pm\sqrt{2\int f(z)dz + C_1}}.$$

Hay $\Phi(x, y^{(n-2)}, C_1, C_2) = 0$. Đây là phương trình dạng (1).

2.3 Phương trình $F(y^{(n-2)}, y^{(n)}) = 0$

$$F(y^{(n-2)}, y^{(n)}) = 0 \qquad (4)$$

a. Nếu từ phương trình (4) suy ra $y^{(n)} = f(y^{(n-2)})$

b. Phương trình không giải ra được $y^{(n)}$ nhưng có thể biểu diễn một cách đơn trị

theo tham số t $\begin{cases} y^{(n-2)} = \phi(t) \\ y^{(n)} = \psi(t) \end{cases}$

Khi đó $dy^{(n-1)} = y^{(n)}dx = \psi(t)dx$, $dy^{(n-2)} = y^{(n-1)}dx = \phi'(t)dt$

$$\Rightarrow y^{(n-1)}dy^{(n-1)} = y^{(n)}y^{(n-1)}dx = \psi(t)\phi'(t)dt$$

Hay $d\left[\frac{1}{2}\left(y^{(n-1)}\right)^2\right] = \psi(t)\phi'(t)dt \Rightarrow \frac{1}{2}\left(y^{(n-1)}\right)^2 = \int \psi(t)\phi'(t)dt + C_1$

$$\Rightarrow y^{(n-1)} = \pm\sqrt{2\int \psi(t)\phi'(t)dt + C_1} = \psi_1(t, C_1).$$

Kết hợp với $y^{(n-2)} = \phi(t)$ ta đưa về phương trình (2) trường hợp b)

§3. Phương trình tuyến tính

3.1. Định nghĩa và tính chất

3.2. Phương trình tuyến tính thuần nhất

3.3. Phương trình tuyến tính không thuần nhất

3.4. Phương trình tuyến tính có hệ số hằng số

3.5. Bài tập tham khảo

§3 Phương trình tuyến tính cấp cao

3.1 Định nghĩa và tính chất

3.1.1 Định nghĩa

Phương trình vi phân tuyến tính cấp n là phương trình có dạng

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + ... + a_n(x)y = \phi(x) \quad a_0(x) \neq 0 .$$

Nếu $\phi(x) \equiv 0$ thì phương trình được gọi là phương trình thuần nhất.

Thông thường ta xét phương trình tuyến tính dưới dạng:

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + ...+ p_n(x)y = f(x) \qquad (1)$$

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + ... + p_n(x)y = 0 \qquad \mathbf{(2)}$$

Nếu đưa vào toán tử vi phân: $L_n = \frac{d^n}{dx^n} + p_1(x)\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} + ... + p_n(x)$. Khi đó:

Phương trình (1) được viết dưới dạng $L_n[y] = f(x)$

Phương trình (2) được viết dưới dạng $L_n[y] = 0$

3.1 Định nghĩa và tính chất

3.1.2 Tính chất

- Phương trình $L_n[y] = f(x)$ vẫn còn là tuyến tính cấp n nếu ta dùng phép thế biến $x = \phi(\xi)$

- Phương trình $L_n[y] = f(x)$ vẫn còn là phương trình tuyến tính cấp n nếu ta dùng phép thế $y = V(x)Z + \eta(x)$. Trong đó V, Z, η là các hàm khả vi liên tục n lần theo x, Z – hàm mới phải tìm và $V(x) \neq 0 \;\; \forall x \in (a,b)$.

3.1 Định nghĩa và tính chất

3.1.3 Sự tồn tại và duy nhất nghiệm

Viết phương trình $y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \dots + p_n(x)y = f(x)$ dưới dạng

$$y^{(n)} = F\left(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}\right)$$

Giả sử với $\forall x \in (a,b)$ thì các hệ số $p_i(x), f(x)$ là các hàm số liên tục.

Do $F\left(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}\right) = -p_1 y^{(n-1)} - p_2 y^{(n-2)} - \dots - p_n y + f(x)$.

Do đó $\left|\dfrac{\partial F}{\partial y^{(n-k)}}\right| = \left|-p_k(x)\right|$.

Vì vậy $\forall x \in [\alpha, \beta] \in (a,b)$ thì $\left|\dfrac{\partial F}{\partial y^{(n-k)}}\right| \le N$ (theo tính chất liên tục của $p_k(x)$)

$\Rightarrow \left|F\left(x, \overline{y}, \overline{y}', \dots, \overline{y}^{(n-1)}\right) - F\left(x, \overline{\overline{y}}, \dots, \overline{\overline{y}}^{(n-1)}\right)\right| \le N \sum_{i=0}^{n-1} \left|\overline{y}^{(i)} - \overline{\overline{y}}^{(i)}\right|$. Tức là điều kiện Lipsit thoả mãn trên đoạn $[\alpha, \beta] \in (a,b) \Rightarrow \exists$ duy nhất nghiệm $y(x)$ của bài toán Côsi đối với phương trình (1) trong khoảng $x_0 - h \le x \le x_0 + h$.

3.2 Phương trình tuyến tính thuần nhất

Xét phương trình thuần nhất $L_n[y]=0$ (1)

3.2.1 Tính chất của toán tử L_n.

* $L_n[y_1+y_2]=L_n[y_1]+L_n[y_2]$

* $L_n[Cy]=CL_n[y]$

Tổng quát ta có $L_n\left[\sum C_k y_k\right]=\sum C_k L_n[y_k]$ (2)

Từ (2) ta có: Nếu $y_k(x)$ $(k=1,2,...,n)$ là nghiệm của (1) thì $\sum_{k=1}^{n} C_k y_k$ cũng là nghiệm của (1)

3.2 Phương trình tuyến tính thuần nhất

3.2.2 Sự phụ thuộc tuyến tính

Xét hệ hàm $\{\phi_k(x)\}_{k=1}^{n}$ xác định trong khoảng (a,b)

Định nghĩa:

Hệ hàm $\{\phi_k(x)\}$ được gọi là phụ thuộc tuyến tính trong khoảng (a,b) nếu tồn tại các hằng số $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n$ không đồng thời bằng không sao cho

$$\alpha_1\phi_1(x)+\alpha_2\phi_2(x)+...+\alpha_n\phi_n(x)\equiv 0 \quad \forall x\in(a,b) \qquad (3)$$

Nếu không tồn tại các α_i như vậy để đồng nhất thức (3) thoả mãn thì ta nói $\{\phi_k(x)\}$ là độc lập tuyến tính.

Ví dụ: a) Các hàm $1,\sin^2(x),\cos^2(x)$ là phụ thuộc tuyến tính trong $(-\infty,+\infty)$

b) Các hàm $1,x,x^2$ là độc lập tuyến tính trong $(-\infty,+\infty)$.

3.2 Phương trình tuyến tính thuần nhất

3.2.3 Định thức Wrônxki

a. Định nghĩa:

Cho hệ hàm $\{\phi_k(x)\}$ $(k=1..n)$ có đạo hàm đến cấp $(n-1)$. Khi đó định thức

$$\begin{vmatrix} y_1(x), & y_2(x), \ldots\ldots\ldots, y_n(x) \\ y_1'(x), & y_2'(x), \ldots\ldots\ldots, y_n'(x) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_1^{(n-1)}(x), & y_2^{(n-1)}(x) \ldots\ldots, y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$$

được gọi là định thức Wrônxki của các hàm $\{\phi_k(x)\}_{k=1}^{n}$. Ký hiệu là $W[y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)]$.

b. Định lý 1: *Nếu các hàm $\{\phi_k(x)\}$ phụ thuộc tuyến tính thì định thức Wrônxki đồng nhất bằng không.*

3.2 Phương trình tuyến tính thuần nhất

3.2.3 Định thức Wrônxki

b. Định lý 1: *Nếu các hàm $\{\phi_k(x)\}$ phụ thuộc tuyến tính thì định thức Wrônxki đồng nhất bằng không.*

Theo giả thiết ta có $\alpha_1\phi_1(x)+\alpha_2\phi_2(x)+\ldots+\alpha_n\phi_n(x)\equiv 0 \quad \forall x \quad \sum\alpha_i^2\neq 0$ (4)

Vi phân (4) theo x $(n-1)$ lần ta được

$$\begin{cases} \alpha_1 y_1+\alpha_2 y_2+\ldots+\alpha_n y_n=0 \\ \alpha_1 y_1'+\alpha_2 y_2'+\ldots+\alpha_n y_n'=0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_1 y_1^{(n-1)}+\alpha_2 y_2^{(n-1)}+\ldots+\alpha_n y_n^{(n-1)}=0 \end{cases} \qquad (5)$$

Tại $\forall x\in(a,b)$ hệ (5) là hệ phương trình đại số thuần nhất với các nghiệm α_i.

Để hệ có nghiệm thoả mãn $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i^2\neq 0$ thì định thức đồng nhất không tức là $W[y_1(x),y_2(x),\ldots,y_n(x)]\equiv 0$.

3.2 Phương trình tuyến tính thuần nhất

3.2.3 Định thức Wrônxki

b. Định lý 1: *Nếu các hàm $\{\phi_k(x)\}$ phụ thuộc tuyến tính thì định thức Wrônxki đồng nhất bằng không.*

Chú ý:

Điều ngược lại nói chung không đúng, tức là nếu $W(x) \equiv 0$ chưa đủ đảm bảo cho $y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)$ phụ thuộc tuyến tính (đối với phương trình $L_n[y] = 0$ thì đúng).

c. Định lý 2: *Nếu các hàm $y_1, y_2, ..., y_n$ là các nghiệm của phương trình (1) và độc lập tuyến tính trong (a,b) liên tục của các hệ số $p_i(x)$ của phương trình thì* $W[y_1, y_2, ..., y_n] \neq 0 \quad \forall x \in (a,b)$.

3.2 Phương trình tuyến tính thuần nhất

3.2.3 Định thức Wrônxki

c. Định lý 2: *Nếu các hàm* $y_1, y_2, ..., y_n$ *là các nghiệm của phương trình (1) và độc lập tuyến tính trong* (a,b) *liên tục của các hệ số* $p_i(x)$ *của phương trình thì* $W[y_1, y_2, ..., y_n] \neq 0 \quad \forall x \in (a,b)$.

Chú ý:

Nghiệm thoả mãn bài toán Côsi $x = x_0$ thì $y(x_0) = 0, ..., y^{(n-1)}(x_0) = 0$ của phương trình (1) phải là nghiệm $y \equiv 0$ do tính duy nhất nghiệm.

3.2.3 Định thức Wrônxki

c. Định lý 2: *Nếu các hàm $y_1, y_2, ..., y_n$ là các nghiệm của phương trình (1) và độc lập tuyến tính trong (a,b) liên tục của các hệ số $p_i(x)$ của phương trình thì $W[y_1, y_2, ..., y_n] \neq 0 \quad \forall x \in (a,b)$.*

Ta chứng minh định lý bằng phản chứng.

Giả sử tại $x = x_0$ thì $W[y_1(x_0), y_2(x_0), ..., y_n(x_0)] = 0 \quad x_0 \in (a,b)$.

Ta chọn các hằng số α_i không đồng thời bằng không sao cho hệ phương trình

sau được thoả mãn
$$\begin{cases} \alpha_1 y_1(x_0) + \alpha_2 y_2(x_0) + ... + \alpha_n y_n(x_0) = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \alpha_1 y_1^{(n-1)}(x_0) + \alpha_2 y_2^{(n-1)}(x_0) + .. + \alpha_n y_n^{(n-1)}(x_0) = 0 \end{cases}$$

Việc chọn có thể làm được vì $W(x_0) = 0$.

Xét hàm $y(x) = \alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x) + ... + \alpha_n y_n(x)$ đây là nghiệm của phương trình (1) thoả mãn bài toán Côsi. $x = x_0$ thì $y^{(k)}(x_0) = 0 \;\; (k = 0..n-1) \Rightarrow y(x) \equiv 0$ theo tính chất duy nhất nghiệm. Tức là $\alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x) + ... + \alpha_n y_n(x) = 0 \quad \forall x \in (a,b)$

$\Rightarrow \{y_k(x)\}$ là phụ thuộc tuyến tính điều này vô lý.

3.2 Phương trình tuyến tính thuần nhất

3.2.4 Hệ nghiệm cơ bản

Định nghĩa:

Một hệ gồm n nghiệm riêng của phương trình $L_n[y]=0$ xác định và độc lập tuyến tính được gọi là một hệ nghiệm cơ bản của phương trình trong khoảng đang xét.

Định lý 3: *Mọi phương trình vi phân tuyến tính thuần nhất đều có một hệ nghiệm cơ bản.*

3.2 Phương trình tuyến tính thuần nhất

3.2.4 Hệ nghiệm cơ bản

Định lý 3: *Mọi phương trình vi phân tuyến tính thuần nhất đều có một hệ nghiệm cơ bản.*

Xét phương trình $L_n[y]=0$. Ta chọn một định thức cấp n sao cho $\Delta=\det(a_{ij})\neq 0$ trong đó $a_{ij}=const$ và lập n nghiệm riêng $y_k(x)$ $(k=1,..,n)$ sao cho khi $x=x_0\in(a,b)$ thì $y_k(x_0)=a_{k1}, y_k'(x_0)=a_{k2},\dots,y_k^{(n-1)}(x_0)=a_{kn}$.

Rõ ràng $W[y_1(x_0),\dots,y_n(x_0)]=\det(a_{ij})\neq 0$. Như vậy $\{y_k(x)\}$ là độc lập tuyến tính, hay $\{y_k(x)\}$ lập thành một hệ nghiệm cơ bản của phương trình $L_n[y]=0$.

3.2 Phương trình tuyến tính thuần nhất

3.2.4 Hệ nghiệm cơ bản

Chú ý:

- Nếu chọn $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \ldots\ldots\ldots\ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots\ldots\ldots\ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots\ldots\ldots\ldots & 1 \end{vmatrix}$ thì hệ nghiệm cơ bản được lập bằng cách trên được gọi là hệ nghiệm cơ bản chuẩn tắc.

- Mọi phương trình thuần nhất cấp n đều luôn luôn tồn tại n nghiệm độc lập tuyến tính.

3.2 Phương trình tuyến tính thuần nhất

3.2.4 Hệ nghiệm cơ bản

Định lý 4: Nếu $\{y_k(x)\}$ $k=1..n$ là một hệ nghiệm cơ bản của phương trình $L_n(y)=0$ thì nghiệm tổng quát của phương trình có dạng

$$y(x)=\sum^{n} C_k y_k(x) \quad (6) \text{ trong đó } C_k = const.$$

Ta phải chứng minh hai điều:

- Hàm $y(x)$ xác định từ (6) thoả mãn $L_n(y)=0$ điều này hiển nhiên theo tính chất của toán tử L_n.
- Từ hệ $\begin{cases} y(x) = C_1y_1 + C_2y_2 + \dots + C_ny_n \\ y'(x) = C_1y_1' + C_2y_2' + \dots + C_ny_n' \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y^{(n-1)}(x) = C_1y_1^{(n-1)} + C_2y_2^{(n-1)} + \dots + C_ny_n^{(n-1)} \end{cases}$

Ta có thể giải ra các hằng số C_k $k=1..n$ nhưng điều này cũng đúng vì $W[y_1,y_2,\dots,y_n]\neq 0 \quad \forall x\in(a,b)$.

3.2 Phương trình tuyến tính thuần nhất

3.2.4 Hệ nghiệm cơ bản

Chú ý: Công thức (6) $y(x)=\sum_{k=1}^{n} C_k y_k(x)$ cho mọi nghiệm riêng của phương trình tuyến tính thuần nhất $L_n(y)=0$.

Thật vậy ta tìm nghiệm riêng $y(x)$ sao cho $y(x_0)=y_0,\dots,y^{(n-1)}(x_0)=y_0^{(n-1)}$,

tức là phải $\exists C_k$ để $y=\sum_{k=1}^{n} C_k y_k$.

Xét hệ: $\begin{cases} y_0 = C_1y_1(x_0) + C_2y_2(x_0) + \dots + C_ny_n(x_0) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_0^{(n-1)} = C_1y_1^{(n-1)}(x_0) + C_2y_2^{(n-1)}(x_0) + \dots + C_ny_n^{(n-1)}(x_0) \end{cases}$

Vì $W \neq 0$ do tính chất độc lập tuyến tính $\Rightarrow \exists C_k$ để $y=\sum_{k=1}^{n} C_k y_k$.

Nếu $y_1(x),\dots,y_n(x)$ là hệ nghiệm cơ bản chuẩn tắc thì nghiệm của bài toán Côsi là $y=y_0y_1(x)+y_0'y_2(x)+\dots+y_0^{(n-1)}y_n(x)$.

3.2 Phương trình tuyến tính thuần nhất

3.2.4 Hệ nghiệm cơ bản

Ví dụ: Xét phương trình $y'' - y = 0$

Phương trình có hai nghiệm $y_1 = e^x, y_2 = e^{-x}$ và

$$W[y_1, y_2] = \det\begin{pmatrix} e^x & e^{-x} \\ e^x & -e^{-x} \end{pmatrix} = -2 \neq 0$$

$\Rightarrow y_1, y_2$ là độc lập tuyến tính. Đây là hệ nghiệm cơ bản vì phương trình là tuyến tính cấp 2 $\Rightarrow$ nghiệm tổng quát của phương trình là $y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$

3.2 Phương trình tuyến tính thuần nhất

3.2.4 Hệ nghiệm cơ bản

Định lý 5: *Nếu ta có (n+1) nghiệm riêng $y_1, y_2, ..., y_n, y_{n+1}$ của phương trình tuyến tính cấp n thì các nghiệm đó sẽ phụ thuộc tuyến tính.*

Chứng minh

Giả sử $y_1, y_2, ..., y_n$ là phụ thuộc tuyến tính thì hiển nhiên định lý đúng.

Giả sử $y_1, y_2, ..., y_n$ là độc lập tuyến tính, khi đó $y_1, y_2, ..., y_n$ lập nên một hệ nghiệm cơ bản. Do đó theo định lý 3 thì $y_{n+1} = \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + ... + \alpha_n y_n$

$\Rightarrow y_1, y_2, ..., y_n, y_{n+1}$ phụ thuộc tuyến tính (đpcm).

Chú ý: Từ định lý 3 và 5 $\Rightarrow$ Mọi phương trình tuyến tính thuần nhất $L_n[y] = 0$ đều có đúng n nghiệm độc lập tuyến tính.

3.3 Phương trình tuyến tính không thuần nhất

Xét phương trình $L_n[y] = f(x)$ (1)

Phương trình thuần nhất tương ứng là $L_n[y] = 0$ (2)

Định lý: *Nếu biết được một nghiệm riêng của (1) thì nghiệm tổng quát của (1) là tổng của nghiệm riêng đó với nghiệm tổng quát của (2).*

Chứng minh

Giả sử y^* là nghiệm riêng của (1), $\{y_k\}$ là hệ nghiệm cơ bản của (2) khi đó ta cần phải chứng minh $y = \sum C_k y_k + y^*$ là nghiệm tổng quát của (1).

* Hiển nhiên $L_n[y] = L_n\left[\sum C_k y_k\right] + L_n\left[y^*\right] = f(x)$ đúng với $\forall C_k$.

* Từ hệ $\begin{cases} C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_n y_n = y - y^* \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ C_1 y_1^{(n-1)} + \ldots\ldots\ldots + C_n y_n^{(n-1)} = y^{(n-1)} - y^{*(n-1)} \end{cases}$ giải ra được C_k vì $W \neq 0$ (đpcm)

3.3 Phương trình tuyến tính không thuần nhất

3.3.1 Phương pháp biến thiên hằng số

Xét phương trình $L_n[y] = f(x)$ (1)

Phương trình thuần nhất tương ứng là $L_n[y] = 0$ (2)

Giả sử $y_1, y_2, \dots, y_n$ là nghiệm riêng độc lập tuyến tính của phương trình $L_n[y] = 0$.

Khi đó $y(x) = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_n y_n$ (C_k $(k = 1..n)$ là các hằng số tuỳ ý) là nghiệm tổng quát của phương trình.

Để tìm nghiệm của phương trình $L_n[y] = f(x)$ ta coi $C_k = C_k(x)$ ta có

$$y'(x) = C_1 y_1' + \dots + C_n y_n' + \frac{dC_1}{dx} y_1 + \dots + \frac{dC_n}{dx} y_n .$$

3.3 Phương trình tuyến tính không thuần nhất

3.3.1 Phương pháp biến thiên hằng số

Để cho biểu thức của $y'(x)$ đơn giản ta chọn $C_1, C_2, \ldots, C_n$ sao cho

$$\frac{dC_1}{dx}y_1 + \ldots + \frac{dC_n}{dx}y_n = 0.$$

Khi đó $y''(x) = C_1y_1'' + \ldots + C_ny_n'' + \frac{dC_1}{dx}y_1' + \ldots + \frac{dC_n}{dx}y_n'$. Ta chọn C_k sao cho

$$\frac{dC_1}{dx}y_1' + \ldots + \frac{dC_n}{dx}y_n' = 0.$$

Cuối cùng $y^{(n)}(x) = C_1y_1^{(n)} + \ldots + C_ny_n^{(n)} + \frac{dC_1}{dx}y_1^{(n-1)} + \ldots + \frac{dC_n}{dx}y_n^{(n-1)}$.

Thay các đạo hàm vừa tìm được vào phương trình $L_n[y] = f(x)$ ta có

$$\sum_{i=1}^{n} C_iL_n\left[y_i(x)\right] + \frac{dC_1}{dx}y_1^{(n-1)} + \ldots + \frac{dC_n}{dx}y_n^{(n-1)} = f(x).$$

Hay $\frac{dC_1}{dx}y_1^{(n-1)} + \ldots + \frac{dC_n}{dx}y_n^{(n-1)} = f(x)$.

3.3 Phương trình tuyến tính không thuần nhất

3.3.1 Phương pháp biến thiên hằng số

Vậy ta có hệ
$$\begin{cases} \dfrac{dC_1}{dx} y_1 + \ldots + \dfrac{dC_n}{dx} y_n = 0 \\ \dfrac{dC_1}{dx} y_1' + \ldots + \dfrac{dC_n}{dx} y_n' = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{dC_1}{dx} y_1^{(n-1)} + \ldots + \dfrac{dC_n}{dx} y_n^{(n-1)} = f(x) \end{cases} \qquad (*)$$

Do $W[y_1,\ldots,y_n] \neq 0$ nên từ (*) giải ra duy nhất các $\dfrac{dC_i}{dx}$.

Giả sử $\dfrac{dC_i}{dx} = \phi_i(x) \Rightarrow C_i = \int \phi_i(x)\,dx + \alpha_i$.

Vậy $y(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_i + \sum_{i=1}^{n} y_i \int \phi_i(x)dx$ là nghiệm tổng quát của phương trình $L_n[y] = f(x)$.

3.3 Phương trình tuyến tính không thuần nhất

Xét phương trình $L_n[y] = f(x)$ (1)

Phương trình thuần nhất tương ứng là $L_n[y] = 0$ (2)

Chú ý: Nghiệm tổng quát $y(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_i + \sum_{i=1}^{n} y_i \int \phi_i(x)dx$ gồm hai thành phần

+ Thành phần thứ nhất $\sum \alpha_i y_i$ là nghiệm tổng quát của $L_n[y] = 0$.

+ Thành phần thứ hai $\sum y_i \int \phi_i(x)dx$ là một nghiệm riêng của phương trình $L_n[y] = f(x)$

3.3 Phương trình tuyến tính không thuần nhất

3.3.1 Phương pháp biến thiên hằng số

Ví dụ: Tìm nghiệm của phương trình $y'' - \frac{y'}{x} = x$ (1)

Bước 1: Xét phương trình $y'' - \frac{y'}{x} = 0$ (2) $\Rightarrow \frac{y''}{y'} = \frac{1}{x}$

Do đó $y' = Ax$ và $y = \frac{1}{2}Ax^2 + B \Rightarrow$ chọn hệ nghiệm cơ bản là $\begin{cases} y_1 = x^2 \\ y_2 = 1 \end{cases}$

Nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất (2) là $y = C_1x^2 + C_2$ với C_1, C_2 là hằng số.

Bước 2: Coi $C_1 = C_1(x)$ và $C_2 = C_2(x)$, ta có hệ $\begin{cases} \frac{dC_1}{dx}x^2 + \frac{dC_2}{dx} = 0 \\ 2x\frac{dC_1}{dx} + 0 = x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{dC_1}{dx} = \frac{1}{2} \\ \frac{dC_2}{dx} = -\frac{x^2}{2} \end{cases}$

Vậy $C_1 = \frac{x}{2} + \alpha_1$; $C_2 = -\frac{x^3}{6} + \alpha_2$. Thay vào nghiệm $y = C_1x^2 + C_2$

$\Rightarrow$ Nghiệm tổng quát của phương trình không thuần nhất là $y = \alpha_1 x^2 + \alpha_2 + x^3/3$

3.4 Phương trình tuyến tính có hệ số hằng số

Dạng $L_n^*[y] = y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_n y = f(x)$ (1)

Trong đó $a_i \ (i = 1..n)$ là các hằng số thực và $f(x)$ là hàm liên tục trong (a,b)

3.4.1 Phương trình tuyến tính thuần nhất có hệ số hằng số

3.4.2 Phương trình tuyến tính không thuần nhất hệ số hằng số

3.4 Phương trình tuyến tính có hệ số hằng số

3.4.1 Phương trình tuyến tính thuần nhất có hệ số hằng số

Xét phương trình $L_n^*[y] = 0$ (2)

Phương trình (2) có thể giải được bằng phép tính đại số:
Đặt $y = e^{kx}$ và ta chọn k để thoả mãn phương trình.

Ta có $L_n^*\left[e^{kx}\right] = e^{kx}\left[k^n + a_1k^{n-1} + \ldots + a_n\right] = 0$.

Ký hiệu $F(k) = k^n + a_1k^{n-1} + \ldots + a_n = 0$ và gọi là phương trình đặc trưng của (2).

Khi đó để $y = e^{kx}$ là nghiệm của (2) thì k phải là nghiệm của phương trình đặc trưng $F(k) = 0$.

Ta xét các trường hợp sau:

a) Phương trình $F(k) = 0$ có nghiệm đơn $k_1, k_2, \ldots, k_n$ khác nhau

b) Phương trình đặc trưng có nghiệm thực $k = k_i$ bội m

c) Phương trình đặc trưng có nghiệm phức liên hợp $\alpha_j \pm i\beta_j$ bội m

3.4 Phương trình tuyến tính có hệ số hằng số

3.4.1 Phương trình tuyến tính thuần nhất có hệ số hằng số

Xét phương trình $L_n^*[y] = 0$ (2)

Phương trình (2) có thể giải được bằng phép tính đại số:
Đặt $y = e^{kx}$ và ta chọn k để thoả mãn phương trình.

Ta có $L_n^*\left[e^{kx}\right] = e^{kx}\left[k^n + a_1 k^{n-1} + \ldots + a_n\right] = 0$.

Ký hiệu $F(k) = k^n + a_1 k^{n-1} + \ldots + a_n = 0$ và gọi là phương trình đặc trưng của (2).

Khi đó để $y = e^{kx}$ là nghiệm của (2) thì k phải là nghiệm của phương trình đặc trưng $F(k) = 0$.

Ta xét các trường hợp sau:

a) Phương trình $F(k) = 0$ có nghiệm đơn $k_1, k_2, \ldots, k_n$ khác nhau

b) Phương trình đặc trưng có nghiệm thực $k = k_i$ bội m

c) Phương trình đặc trưng có nghiệm phức liên hợp $\alpha_j \pm i\beta_j$ bội m

3.4 Phương trình tuyến tính có hệ số hằng số

3.4.1 Phương trình tuyến tính thuần nhất có hệ số hằng số

Xét phương trình $L_n^*[y] = 0$ (2)

Ký hiệu $F(k) = k^n + a_1 k^{n-1} + \ldots + a_n = 0$ và gọi là phương trình đặc trưng của (2)

a) Phương trình $F(k) = 0$ có nghiệm đơn $k_1, k_2, \ldots, k_n$ khác nhau

Khi đó rõ ràng $y_i = e^{k_i x}$ $(i = 1..n)$ là các nghiệm riêng của phương trình (2)

Ví dụ 1: Xét phương trình $y''' - 3y'' + 2y' = 0$

Phương trình đặc trưng tương ứng $k^3 - 3k^2 + 2k = 0$

Giải phương trình $\Rightarrow k_1 = 0, k_2 = 1, k_3 = 2$. Do đó ta có các nghiệm riêng độc lập tuyến tính là : $y_1 = 1; y_2 = e^x; y_3 = e^{2x}$.

Nghiệm tổng quát của phương trình $y = C_1 + C_2 e^x + C_3 e^{2x}$

3.4 Phương trình tuyến tính có hệ số hằng số

3.4.1 Phương trình tuyến tính thuần nhất có hệ số hằng số

a) Phương trình $F(k)=0$ có nghiệm đơn $k_1,k_2,...,k_n$ khác nhau

Chú ý:

Trong trường hợp phương trình đặc trưng có nghiệm phức $k=\alpha\pm i\beta$ thì thay cho nghiệm $e^{(\alpha\pm i\beta)x}$ của phương trình (2) ta sẽ có hai nghiệm thực là $y=e^{\alpha x}\cos\beta x$ và $y=e^{\alpha x}\sin\beta x$. Điều này được khẳng định từ bổ đề.

Bổ đề: *Nếu phương trình $L_n^*[y]=0$ có nghiệm $y=u(x)+iv(x)$, trong đó $u(x),v(x)$ là các hàm thực thì các hàm $u(x),v(x)$ cũng là nghiệm của phương trình (đối với phương trình $L_n[y]=0$ cũng đúng).*

Tập các hàm $e^{k_ix},e^{\alpha x}\cos\beta x,e^{\alpha x}\sin\beta x$ độc lập tuyến tính trong khoảng $(-\infty,+\infty)$ do đó chúng lập nên một hệ nghiệm cơ bản.

3.4 Phương trình tuyến tính có hệ số hằng số

3.4.1 Phương trình tuyến tính thuần nhất có hệ số hằng số

a) Phương trình $F(k)=0$ có nghiệm đơn $k_1, k_2, \dots, k_n$ khác nhau

Ví dụ 2: Xét phương trình $y''' - 3y'' + 9y' + 13y = 0$

Phương trình đặc trưng $k^3 - 3k^2 + 9k + 13 = 0$

Giải phương trình ta được $k_1 = -1; k_2 = 2 + 3i; k_3 = 2 - 3i$

Khi đó các nghiệm riêng độc lập tuyến tính :

$$y_1 = e^{-x}; y_2 = e^{2x}\cos 3x; y_3 = e^{2x}\sin 3x$$

Nghiệm tổng quát của phương trình $y(x) = C_1e^{-x} + C_2e^{2x}\cos 3x + C_3e^{2x}\sin 3x$

3.4 Phương trình tuyến tính có hệ số hằng số

3.4.1 Phương trình tuyến tính thuần nhất có hệ số hằng số

b) Phương trình đặc trưng có nghiệm thực k = k_i bội m

Trong trường hợp này ta chứng minh rằng phương trình (2) có các nghiệm riêng $y_1 = e^{k_i x}; y_2 = xe^{k_i x}; \ldots; y_m = x^{m-1}e^{k_i x}$ (3)

Ta chú ý rằng: Nếu $u = u(x,k)$ thì $\dfrac{\partial^j}{\partial k^j} L_n^*[u(x,k)] = L_n^*\left[\dfrac{\partial^j u(x,k)}{\partial k^j}\right]$

Ta chứng minh $L_n^*\left[x^j e^{k_i x}\right] = 0$ với $j = 0..m-1$.

Vi phân đồng nhất thức $L_n^*\left[e^{kx}\right] = F(k)e^{kx}$ j lần theo k .

$$\frac{\partial^j}{\partial k^j}\left[L_n^*\left[e^{kx}\right]\right] = \left[e^{kx}F(k)\right]^{(j)} = \sum_{l=0}^{j} C_j^l F^{(l)}(k)x^{j-l}e^{kx}$$

3.4 Phương trình tuyến tính có hệ số hằng số

3.4.1 Phương trình tuyến tính thuần nhất có hệ số hằng số

b) Phương trình đặc trưng có nghiệm thực k = k_i bội m

Mặt khác theo chú ý ta có $\dfrac{\partial^j}{\partial k^j}\left[L_n^*\left[e^{kx}\right]\right] = L_n^*\left[\dfrac{\partial^j}{\partial k^j}e^{kx}\right] = L_n^*\left[x^j e^{kx}\right].$

Do đó $L_n^*\left[x^j e^{kx}\right] = \sum_{l=0}^{j} C_j^l F^{(l)}(k) x^{j-l} e^{kx}$,

Đặt $k = k_i \Rightarrow L_n^*\left[x^j e^{k_i x}\right] = \sum_{l=0}^{j} C_j^l F^{(l)}(k_i) x^{j-l} e^{k_i x}$.

Nhưng vì k_i là nghiệm bội m của phương trình

$$F(k) = 0 \Rightarrow F(k_i) = 0, F'(k_i) = 0, \dots, F^{(m-1)}(k_i) = 0, F^{(m)}(k_i) \neq 0$$

Do đó $L_n^*\left[x^j e^{k_i x}\right] = 0 \quad \forall\, j = 1, 2, \dots, m-1$ (đpcm).

Ta chú ý hệ nghiệm (3) là độc lập tuyến tính trong $(-\infty, +\infty)$.

3.4 Phương trình tuyến tính có hệ số hằng số

3.4.1 Phương trình tuyến tính thuần nhất có hệ số hằng số

c) Phương trình đặc trưng có nghiệm phức liên hợp $\alpha_i \pm i\beta_i$ bội m

Ta chứng minh rằng trong trường hợp này phương trình có $2m$ nghiệm thực

$$y_1 = e^{\alpha_j x}\cos\beta_j x, y_2 = e^{\alpha_j x}x\cos\beta_j x, \ldots, y_m = x^{m-1}e^{\alpha_j x}\cos\beta_j x$$

$$y_{m+1} = e^{\alpha_j x}\sin\beta_j x, y_{m+2} = e^{\alpha_j x}x\sin\beta_j x, \ldots, y_{2m} = x^{m-1}e^{\alpha_j x}\sin\beta_j x.$$

Thật vậy theo b) thì (2) có các nghiệm $\overline{y}_1 = e^{(\alpha_j \pm i\beta_j)x}$ .... $\overline{y}_m = x^{m-1}e^{(\alpha_j \pm i\beta_j)x}$.

Dựa vào bổ đề và công thức Ơle ta nhận được $2m$ nghiệm trên, các nghiệm này độc lập tuyến tính trong $(-\infty, +\infty)$.

3.4 Phương trình tuyến tính có hệ số hằng số

3.4.1 Phương trình tuyến tính thuần nhất có hệ số hằng số

c) Phương trình đặc trưng có nghiệm phức liên hợp $\alpha_i \pm i\beta_i$ bội m

Ví dụ: Xét phương trình $y^{(5)} - y^{(4)} + 8y''' - 8y'' + 16y' - 16y = 0$

Phương trình đặc trưng $F(k) = k^5 - k^4 + 8k^3 - 8k^2 + 16k - 16 = 0$

có nghiệm $k_1 = 1, k_2 = k_3 = 2i, k_4 = k_5 = -2i$ (nghiệm $2i$ bội 2 ; nghiệm $-2i$ bội 2)

Do đó các nghiệm $y_1 = e^x, y_2 = \cos 2x,\ y_3 = \sin 2x,\ y_4 = x\cos 2x,\ y_5 = x\sin 2x$ lập thành hệ nghiệm cơ bản.

Nghiệm tổng quát là:

$$y(x) = C_1 e^x + C_2 \cos 2x + C_3 \sin 2x + x\left(C_4 \cos 2x + C_5 \sin 2x\right)$$

3.4 Phương trình tuyến tính có hệ số hằng số

3.4.2 Phương trình tuyến tính không thuần nhất có hệ số hằng số

Trong phần này ta xét dạng phương trình $L_n^*[y] = f(x)$. Trước hết ta chứng minh một bổ đề quan trọng gọi là NGUYÊN LÝ CHỒNG CHẤT NGHIỆM

Bổ đề:

Xét phương trình $L_n^*[y] = v_1(x) + v_2(x)$, *trong đó* $v_1(x), v_2(x)$ *là các hàm liên tục. Giả sử:* $y_1(x)$ *là nghiệm của* $L_n^*[y] = v_1(x)$

$y_2(x)$ *là nghiệm của* $L_n^*[y] = v_2(x)$.

Khi đó $y_1(x) + y_2(x)$ *là nghiệm của* $L_n^*[y] = v_1(x) + v_2(x)$.

Ý nghĩa của bổ đề: Nếu vế phải $f(x)$ của phương trình không thuần nhất là một hàm phức tạp thì ta có thể phân tích hàm đó thành tổng của nhiều hàm đơn giản và lần lượt giải các phương trình có vế phải là các hàm đơn giản đó.

3.4 Phương trình tuyến tính có hệ số hằng số

3.4.2 Phương trình tuyến tính không thuần nhất có hệ số hằng số

xét phương trình $L_n^*[y] = f(x)$ (1)

Ta xét ba trường hợp :

a) Trường hợp $f(x) = A_0x^S + A_1x^{S-1} + \ldots + A_S$

b) Trường hợp $f(x) = e^{px}(A_0x^S + A_1x^{S-1} + \ldots + A_S)$

c) Trường hợp $f(x) = e^{px}\left(P_S(x)\cos qx + Q_S(x)\sin qx\right)$

3.4.2 Phương trình tuyến tính không thuần nhất có hệ số hằng số

a) Trường hợp $f(x) = A_0 x^S + A_1 x^{S-1} + \ldots + A_S$

- Giả sử hệ số $a_n \neq 0$: Ta chứng minh rằng phương trình có nghiệm riêng là một đa thức bậc S. Ta tìm nghiệm riêng dạng $y^*(x) = B_0 x^S + B_1 x^{S-1} + \ldots + B_S$. Thay vào phương trình $L_n^*[y] = f(x)$ và so sánh các luỹ thừa x^k ta sẽ xác định được các hằng số B_k $(k = 1..S)$ theo A_k.

Ví dụ: Xét phương trình $y'' - 4y = x$

3.4.2 Phương trình tuyến tính không thuần nhất có hệ số hằng số

a) Trường hợp $f(x) = A_0 x^S + A_1 x^{S-1} + \ldots + A_S$

Ví dụ: Xét phương trình $y'' - 4y = x$

Bước 1: Giải phương trình thuần nhất tương ứng $y'' - 4y = 0$ có nghiệm tổng quát là $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x}$.

Bước 2: Tìm nghiệm riêng của phương trình không thuần nhất $y'' - 4y = x$

Nghiệm riêng của phương trình có dạng $y^*(x) = Ax + B$. Khi đó có $y^{*\prime}(x) = A,\ y^{*\prime\prime}(x) = 0$. Thay vào phương trình ban đầu có:

$$-4(Ax+B) = x \Leftrightarrow \begin{cases} -4A = 1 \\ -4B = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = -\dfrac{1}{4} \\ B = 0 \end{cases} \Rightarrow y^*(x) = -\frac{1}{4}x$$

Vậy nghiệm tổng quát của phương trình ban đầu là $y(x) = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x} - \frac{1}{4}x$

3.4.2 Phương trình tuyến tính không thuần nhất có hệ số hằng số

a) Trường hợp $f(x) = A_0x^S + A_1x^{S-1} + \ldots + A_S$

- Giả sử $a_n = a_{n-1} = \ldots = a_{n-\alpha+1} = 0$ còn $a_{n-\alpha} \neq 0$ (điều này có nghĩa $k = 0$ là nghiệm bội α của $F(k) = 0$).

Ta chứng minh rằng phương trình $L_n^*[y] = f(x)$ có nghiệm riêng dạng $y^*(x) = x^\alpha\left(B_0x^S + B_1x^{S-1} + \ldots + B_S\right)$. Thật vậy đặt $y^{(\alpha)} = z$ phương trình $L_n^*[y] = f(x)$ có dạng $z^{(n-\alpha)} + a_1z^{(n-\alpha-1)} + \ldots. + a_{n-\alpha}z = f(x) \Rightarrow$ phương trình có nghiệm riêng $z^* = \bar{B}_0x^S + \ldots. + \bar{B}_S$, do đó tích phân α lần ta thu được $y^* = x^\alpha\left(B_0x^S + \ldots. + B_S\right)$.

Ví dụ: Xét phương trình $y'' + y' = x - 2 \quad (n = 2, a_2 = 0, a_1 \neq 0)$

3.4.2 Phương trình tuyến tính không thuần nhất có hệ số hằng số

a) Trường hợp $f(x) = A_0 x^S + A_1 x^{S-1} + \ldots + A_S$

Ví dụ: Xét phương trình $y'' + y' = x - 2 \quad (n = 2, a_2 = 0, a_1 \neq 0)$

Bước 1: Giải phương trình thuần nhất tương ứng $y'' + y' = 0$ có nghiệm tổng quát là $y = C_1 + C_2 e^{-x}$.

Bước 2: Tìm nghiệm riêng của phương trình không thuần nhất $y'' + y' = x - 2$

Nghiệm riêng của phương trình có dạng $y^*(x) = x(Ax + B)$. Khi đó có $y^{*\prime}(x) = 2Ax + B,\ y^{*\prime\prime}(x) = 2A$. Thay vào phương trình ban đầu có:

$$2A + (2Ax + B) = x - 2 \Leftrightarrow \begin{cases} 2A = 1 \\ 2A + B = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = \dfrac{1}{2} \\ B = -3 \end{cases}$$

$\Rightarrow y^*(x) = x\left(\dfrac{1}{2}x - 3\right) = \dfrac{1}{2}x^2 - 3x$ Nghiệm tổng quát $y(x) = C_1 + C_2 e^{-x} + \dfrac{x^2}{2} - 3x$

3.4.2 Phương trình tuyến tính không thuần nhất có hệ số hằng số

b) Trường hợp $f(x) = e^{px}(A_0x^S + A_1x^{S-1} + ... + A_S)$

Đặt $y = e^{px}z$ (z là hàm cần tìm). Thay vào phương trình ta được

$$e^{px}\left[z^{(n)} + b_1z^{(n-1)} + ... + b_nz\right] = e^{px}\left[A_0x^S + A_1x^{S-1} + ... + A_S\right]$$

hay $z^{(n)} + b_1z^{(n-1)} + ... + b_nz = A_0x^S + ... + A_S$. (5)

Trong đó $b_i = const$ $(i = 1..n)$, ta lại trở về trường hợp a).

Chú ý rằng nếu xét phương trình đặc trưng của (5)

$$\overline{k}^n + b_1\overline{k}^{n-1} + ... + b_n = 0 \qquad (6)$$

và $$k^n + a_1k^{n-1} + ... + a_n = 0 \qquad (7)$$

Thì ta thấy nếu (6) có nghiệm $\overline{k} = a$ thì (7) có nghiệm $k = a + p$.

Vì nếu $z = e^{ax}$ là nghiệm của (5) thì $y = e^{(a+p)x}$ là nghiệm của (4)

3.4.2 Phương trình tuyến tính không thuần nhất có hệ số hằng số

b) Trường hợp $f(x) = e^{px}(A_0x^S + A_1x^{S-1} + \ldots + A_S)$

Ta có nhận xét:

1. Nếu $b_n \neq 0$ thì phương trình không có nghiệm $\bar{k} = 0$ hay phương trình (7) không có nghiệm $k = p$. Do đó ta đi đến quy tắc:

   Nếu p không phải là nghiệm của phương trình đặc trưng F(k)=0 thì phương trình (4) có nghiệm riêng $y^*(x) = e^{px}\left[B_0x^S + \ldots + B_S\right]$.

2. Nếu phương trình (6) có nghiệm $\bar{k} = 0$ bội α thì phương trình (7) có nghiệm $k = p$ bội α. Do đó ta có quy tắc:

   Nếu p là nghiệm bội α của phương trình đặc trưng F(k)=0 thì phương trình (4) có nghiệm riêng $y^*(x) = e^{px}x^{\alpha}\left[B_0x^S + \ldots + B_S\right]$

3.4.2 Phương trình tuyến tính không thuần nhất có hệ số hằng số

b) Trường hợp $f(x) = e^{px}(A_0x^S + A_1x^{S-1} + \ldots + A_S)$

Ví dụ 1: Phương trình $y'' + y = e^{3x}(x+1)$ có nghiệm riêng dạng

$$y^*(x) = e^{3x}(Ax + B).$$

Ví dụ 2: Phương trình $y'' - y = e^x(x^2 - 1)$ có nghiệm riêng dạng

$$y^*(x) = xe^x(Ax^2 + Bx + C).$$

Ví dụ 3: Phương trình $y''' + 3y'' + 3y' + y = e^{-x}(x-5)$ có $p = -1$ là nghiệm bội 3 nên nghiệm riêng có dạng $y^*(x) = x^3e^{-x}(Ax + B)$.

3.4.2 Phương trình tuyến tính không thuần nhất có hệ số hằng số

c) Trường hợp $f(x) = e^{px}\left(P_S(x)\cos qx + Q_S(x)\sin qx\right)$

Ta đưa trường hợp này về trường hợp b) thông qua biến đổi:

$$\cos qx = \frac{1}{2}\left(e^{iqx} + e^{-iqx}\right);\ \sin qx = \frac{1}{2i}\left(e^{iqx} - e^{-iqx}\right)$$

$$\Rightarrow f(x) = e^{(p+iq)x}\left(\frac{P_S(x)}{2} + \frac{Q_S(x)}{2i}\right) + e^{(p-iq)x}\left(\frac{P_S(x)}{2} - \frac{Q_S(x)}{2i}\right)$$

$$V_1(x) = e^{(p+iq)x}\left(\frac{P_S(x)}{2} + \frac{Q_S(x)}{2i}\right) \qquad V_2(x) = e^{(p-iq)x}\left(\frac{P_S(x)}{2} - \frac{Q_S(x)}{2i}\right)$$

Áp dụng nguyên lý chồng chất nghiệm ta có:

3.4.2 Phương trình tuyến tính không thuần nhất có hệ số hằng số

c) Trường hợp $f(x) = e^{px}\left(P_S(x)\cos qx + Q_S(x)\sin qx\right)$

- Khi p + iq không là nghiệm của $F(k)=0 \Rightarrow$ ta tìm nghiệm riêng ứng với vế phải là $V_1(x)$ có dạng $y_1^*(x) = e^{(p+iq)x}R_S(x)$. Vì $p+iq$ không là nghiệm của $F(k)=0 \Rightarrow$ $p-iq$ cũng không là nghiệm của $F(k)=0$ do đó ta tìm nghiệm ứng với $V_2(x)$ có dạng là $y_2^*(x) = e^{(p-iq)x}T_S(x)$. Vì y_1^*, y_2^* là liên hợp suy ra $R_S(x), T_S(x)$ cũng liên hợp, tức là

$$\begin{aligned} R_S(x) &= \overline{P}_S(x) + i\overline{Q}_S(x) \\ T_S(x) &= \overline{P}_S(x) - i\overline{Q}_S(x) \end{aligned}.$$

Do đó ta có nghiệm riêng của phương trình (4) có dạng

$$y^* = y_1^* + y_2^* = e^{(p+iq)x}\left(P_S + iQ_S\right) + e^{(p-iq)x}\left(P_S - iQ_S\right) = e^{px}\left(2\overline{P}_S\cos qx - 2\overline{Q}_S\sin qx\right)$$

$$= e^{px}\left(\overline{\overline{P}}_S(x)\cos qx + \overline{\overline{Q}}_S(x)\sin qx\right)$$

3.4.2 Phương trình tuyến tính không thuần nhất có hệ số hằng số

c) Trường hợp $f(x)=e^{px}\left(P_S(x)\cos qx+Q_S(x)\sin qx\right)$

Ta có quy tắc: *Nếu* $p+iq$ *không phải là nghiệm của* $F(k)=0$ *thì phương trình (4) có nghiệm riêng dạng* $y^*(x)=e^{px}\left(\overline{\overline{P}}_S(x)\cos qx+\overline{\overline{Q}}_S(x)\sin qx\right)$. *Trong đó* $\overline{\overline{P}}_S$, $\overline{\overline{Q}}_S$ *là đa thức bậc S của x.*

Ví dụ 1: Xét phương trình $y''-y=e^x x\cos x$

Nghiệm riêng có dạng

$$y^*(x)=e^x\left[\left(A_1x+B_1\right)\cos x+\left(A_2x+B_2\right)\sin x\right]$$

3.4.2 Phương trình tuyến tính không thuần nhất có hệ số hằng số

c) Trường hợp $f(x) = e^{px}\left(P_S(x)\cos qx + Q_S(x)\sin qx\right)$

- Nếu $p \pm iq$ là nghiệm bội α của phương trình $F(k) = 0$ thì tương tự như trên ta có quy tắc:

Nếu $p \pm iq$ là nghiệm bội α của phương trình $F(k) = 0$ thì phương trình (4) có nghiệm riêng dạng $y^*(x) = e^{px}x^{\alpha}\left(\bar{\bar{P}}_S(x)\cos qx + \bar{\bar{Q}}_S(x)\sin qx\right)$

Ví dụ 2: Xét phương trình $y'' + 2y' + 2y = e^{-x}\left(x\cos x + 3\sin x\right)$

Phương trình $k^2 + 2k + 2 = 0$ có nghiệm $-1 \pm i$; $p \pm iq = -1 \pm i$

Nghiệm riêng có dạng

$$y^*(x) = xe^{-x}\left[\left(A_1x + B_1\right)\cos x + \left(A_2x + B_2\right)\sin x\right].$$

Chú ý: Nếu một trong các đa thức P_S, Q_S có bậc thấp hơn S (đặc biệt $\equiv 0$) thì nói chung cả hai đa thức $\bar{\bar{P}}_S, \bar{\bar{Q}}_S$ vẫn có bậc S.

3.5 Bài tập tham khảo

Phương trình vi phân tuyến tính

1. $x^2y'' - 2y = x^3\cos x$, biết một nghiệm riêng của phương trình vi phân thuần nhất tương ứng là $y_1 = x^2$
2. Giải phương trình $y'' + \frac{2}{x}y' + y = \frac{\cot gx}{x}$ biết một nghiệm riêng của phương trình vi phân thuần nhất tương ứng $y_1 = \frac{\sin x}{x}$
3. Giải phương trình vi phân: $x^2(x+1)y'' = 2y$ biết một nghiệm $y_1 = 1 + \frac{1}{x}$
4. Giải phương trình vi phân $(x^2+1)y'' - 2y = 0$ nếu biết một nghiệm của nó có dạng đa thức.
5. Giải phương trình vi phân $(2x+1)y'' + (2x-1)y' - 2y = x^2 + x$ biết nó có hai nghiệm riêng $y_1 = \frac{x^2+4x-1}{2}$ $\quad y_2 = \frac{x^2+1}{2}$
6. Xác định hằng số α sao cho $y = e^{\alpha x^2}$ là nghiệm riêng của phương trình vi phân
7. $y'' + 4xy' + (4x^2+2)y = 0$. Tìm nghiệm tổng quát của phương trình.
8. tìm nghiệm tổng quát của phương trình vi phân $(3x^2+1)xy'' + 2y' - 6xy = 4 - 12x^2$ biết rằng nó có hai nghiệm riêng $y_1 = 2x, \quad y_2 = (x+1)^2$

3.5 Bài tập tham khảo

Phương trình vi phân tuyến tính hệ số hằng số

1. $y''' - 13y' - 12y = 0$.
2. $y''' - 2y'' + 9y' - 18y = 0$.
3. $y^{(4)} + y = 0$.
4. $y^{(4)} + 2y''' + 3y'' + 2y' + y = 0$.
5. $y^{(7)} + 3y^{(6)} + 3y^{(5)} + y^{(4)} = 0$.
6. $y'' + y = 4e^x$.
7. $y'' - 3y' + 2y = 3e^{2x} + 2x^2$.
8. $y'' - y = 2\sin x - 4\cos x$.
9. $y''' - 2y' + 4y = e^{-x}\cos x$.
10. $y'' + n^2 y = \sin^3 nx$.
11. $y'' + y = \sin x \sin 2x$.
12. $x^2 y'' - xy' + 2y = x\ln x \qquad t = \ln x$.
13. $(2x+1)^2 y'' - 4(2x+1)y' + 8y = -8x - 4 \qquad t = \ln(2x+1)$.
14. $y'' + \frac{1}{x}y' + \frac{1}{x^2}y = 2\sin(\ln x) \qquad t = \ln x$.
15. $(1+x)^2 y'' + (1+x)y' + y = 4\cos\ln(1+x) \qquad t = \ln(1+x)$.

Chương 3
HỆ PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN

§ 1 Các khái niệm cơ bản

§ 2 Đưa hệ phương trình về PTVP cấp cao

§ 3 Hệ phương trình vi phân tuyến tính thuần nhất

§ 4 Hệ phương trình vi phân tuyến tính không thuần nhất

§ 5 Hệ phương trình thuần nhất hệ số hằng số

Bài tập tham khảo

§1. Các khái niệm cơ bản

1.1. Định nghĩa

1.2. Các loại nghiệm của hệ phương trình

§1 Các khái niệm cơ bản

1.1. Định nghĩa

Cho hệ phương trình vi phân dạng

$$\begin{cases} F_1\left(x, y_1, y_2, \ldots, y_n, \dfrac{dy_1}{dx}, \dfrac{dy_2}{dx}, \ldots, \dfrac{dy_n}{dx}\right) = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ F_n\left(x, y_1, y_2, \ldots, y_n, \dfrac{dy_1}{dx}, \dfrac{dy_2}{dx}, \ldots, \dfrac{dy_n}{dx}\right) = 0 \end{cases} \quad (1)$$

Hệ được gọi là hệ phương trình vi phân cấp một. Trong trường hợp nếu từ hệ (1) ta giải ra các đạo hàm

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1, \ldots, y_n) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{dy_n}{dx} = f_n(x, y_1, \ldots, y_n) \end{cases} \quad (2)$$

Trong đó các hàm ở vế phải chỉ phụ thuộc $x, y_1, \ldots, y_n$, không phụ thuộc các đạo hàm thì hệ như vậy được gọi là hệ chuẩn tắc.

1.2 Các loại nghiệm của phương trình

a) *Nghiệm tổng quát:* Ta xem $x, y_1, ..., y_n$ như là toạ độ của một điểm trong không gian E_{n+1} $(n+1)$ chiều $(x, y_1, ..., y_n)$, khi đó mỗi nghiệm của (2) sẽ ứng với một đường cong trong không gian E_{n+1} và nghiệm tổng quát của hệ (2) là hệ hàm

$$\begin{cases} y_1 = y_1(x, C_1, C_2, ..., C_n) \\ y_2 = y_2(x, C_1, C_2, ..., C_n) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_n = y_n(x, C_1, C_2, ..., C_n) \end{cases} \qquad (3)$$

lập thành một họ đường cong phụ thuộc n tham số.

Nếu hệ (2) thoả mãn trong miền D nào đó $\in E_{n+1}$ điều kiện tồn tại duy nhất nghiệm thì tại mỗi điểm của D chỉ có một và chỉ một đường cong tích phân đi qua.

1.2 Các loại nghiệm của phương trình (tiếp)

b) Nghiệm riêng: Người ta gọi nghiệm riêng của hệ (2) là nghiệm mà có được bằng cách cho $C_1, C_2, ..., C_n$ trong nghiệm tổng quát các giá trị xác định $C_1 = C_1^0, C_2 = C_2^0, ..., C_n = C_n^0$

c) Nghiệm kì dị: Nghiệm $y_i = y_i(x)$ $i = 1..n$ được gọi là nghiệm kì dị nếu tại mọi điểm của nó tính chất duy nhất nghiệm bị phá vỡ.

§2. Đưa hệ phương trình về PTVP cấp cao

2.1. Ví dụ

2.2. Nhận xét

§2 Đưa hệ phương trình về PTVP cấp cao

2.1. Ví dụ

Ví dụ 1: Giải hệ phương trình $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y \\ \dfrac{dy}{dt} = x \end{cases}$

Từ phương trình 2 $\Rightarrow \dfrac{d^2x}{dt^2} = \dfrac{dy}{dt} = x \Rightarrow \dfrac{d^2x}{dt^2} - x = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = C_1e^t + C_2e^{-t} \\ y = C_1e^t - C_2e^{-t} \end{cases}$$

§2 Đưa hệ phương trình về PTVP cấp cao

2.1. Ví dụ

Ví dụ 2: Giải hệ phương trình $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x - 2y \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x - y \end{cases}$

Từ phương trình đầu $\Rightarrow \dfrac{d^2x}{dt^2} = 3\dfrac{dx}{dt} - 2\dfrac{dy}{dt} = 3\dfrac{dx}{dt} - x - \dfrac{dx}{dt}$

hay $\dfrac{d^2x}{dt^2} - 2\dfrac{dx}{dt} + x = 0 \Rightarrow x = C_1e^t + C_2te^t$

$$y = \frac{1}{2}\left(3x - \frac{dx}{dt}\right) = \frac{1}{2}\left(3C_1e^t + 3C_2te^t - C_1e^t - C_2e^t - C_2te^t\right) = e^t\left(C_1 - \frac{C_2}{2} + C_2t\right)$$

2.2. Nhận xét

Từ hai ví dụ trên suy ra để giải một hệ phương trình vi phân ta có thể tiến hành như sau:

- Vi phân một phương trình của hệ đã cho để lập một phương trình vi phân cấp cao.
- Giải phương trình vi phân cấp cao đó ta tìm được nghiệm.

Về mặt lý thuyết ta phải chứng minh hai điều:

2.2. Nhận xét

Về mặt lý thuyết ta phải chứng minh hai điều:

a) Với điều kiện nào thì từ hệ $\frac{dx_i}{dt} = f_i(t, x_1, x_2, ..., x_n)$ ta có thể lập được một phương trình vi phân cấp n đối với một hàm nào đấy, chẳng hạn x_1

$$\frac{d^n x_1}{dt^n} = \Phi_1\left(t, x, \frac{dx_1}{dt}, ..., \frac{d^{n-1}x_1}{dt^{n-1}}\right) \qquad (3)$$

b) Tiếp đó ta phải chứng minh $\forall$ nghiệm của (4) đều ứng với một nghiệm $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ của hệ (2).

Người ta đã chứng minh rằng nếu các hàm $f_i\ (i = 1..n)$ liên tục và có đạo hàm riêng liên tục đến cấp $n-1$ theo tất cả các biến thì cả a) và b) đều thoả mãn.

§3. Hệ phương trình tuyến tính thuần nhất

3.1. Định nghĩa

3.2. Toán tử vi phân tuyến tính

3.3. Khái niệm về sự phụ thuộc tuyến tính

3.4. Hệ nghiệm cơ bản

§3 Hệ phương trình tuyến tính thuần nhất

3.1. Định nghĩa

Ta gọi hệ thuần nhất tuyến tính là hệ có dạng:

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = a_{11}(t)x_1 + a_{12}(t)x_2 + \ldots + a_{1n}(t)x_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{dx_n}{dt} = a_{n1}(t)x_1 + a_{n2}(t)x_2 + \ldots + a_{nn}(t)x_n \end{cases} \qquad (1)$$

Ký hiệu

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ .. \\ .. \\ x_n \end{pmatrix}; \quad \frac{dX}{dt} = \begin{pmatrix} \dfrac{dx_1}{dt} \\ \dfrac{dx_2}{dt} \\ .... \\ \dfrac{dx_n}{dt} \end{pmatrix}; \quad A(t) = \left(a_{ij}(t)\right)_{n\times n}$$

Khi đó (1) có dạng $\dfrac{dX}{dt} = A(t)X$ (1')

§3 Hệ phương trình tuyến tính thuần nhất

3.1. Định nghĩa

Tương tự ta có hệ $\frac{dX}{dt} = A(t)X + F(t)$ (2)

trong đó $F(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ .. \\ f_n(t) \end{pmatrix}$. Hệ (2) gọi là hệ phương trình vi phân tuyến tính không thuần nhất.

Sau đây ta giả sử các $a_{ij}(t)$, $f_i(t)$ là các hàm liên tục trong (a,b) khi đó trong $\forall[\alpha,\beta]\in(a,b)$ hệ (2) thoả mãn điều kiện định lý tồn tại và duy nhất nghiệm. Sau này ta sẽ thấy đối với (2) nghiệm xác định bởi hệ điều kiện đầu với $t_0 \in (a,b)$ sẽ tồn tại duy nhất trên toàn khoảng (a,b).

3.2. Toán tử vi phân tuyến tính

Đặt $L[X] = \dfrac{dX}{dt} - A(t)X$, khi đó:

Hệ (1) có dạng $L(X) = 0$

Hệ (2) có dạng $L(X) = F(t)$.

Tính chất của toán tử L: $L[C_1X_1 + C_2X_2] = C_1L[X_1] + C_2L[X_2]$

Một số định lý về nghiệm của hệ phương trình vi phân tuyến tính thuần nhất

§3 Hệ phương trình tuyến tính thuần nhất

3.2. Toán tử vi phân tuyến tính

Một số định lý về nghiệm của hệ phương trình vi phân tuyến tính thuần nhất

Định lý 1: *Nếu* $X_i \ (i = 1..n)$ *là các nghiệm của hệ* $L(X) = 0$ *thì* $\sum C_k X_k$ *(với* $C_k = const$ *) cũng là nghiệm của hệ phương trình.*

Định lý 2: *Nếu* $L(X) = 0$ *với ma trận* $A(t)$ *thực có nghiệm phức* $X = U + iV$ *thì* U, V *cũng là nghiệm của hệ phương trình đó.*

3.3. Khái niệm về sự phụ thuộc tuyến tính

Giả sử các vector $X_1, X_2, ..., X_n$ xác định trên (a,b)

$$X_i = \begin{pmatrix} x_{1i}(t) \\ x_{2i}(t) \\ \dots \\ x_{ni}(t) \end{pmatrix} \qquad (i = 1..n)$$

Khi đó ta nói rằng $\{X_i\}$ là phụ thuộc tuyến tính trên (a,b) nếu tồn tại các hằng số $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ không đồng thời bằng không sao cho

$$\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \dots + \alpha_n X_n \equiv 0 \qquad \forall t \in (a,b) \qquad (*)$$

Nếu (*)chỉ nghiệm đúng với $\forall \alpha_i \equiv 0$ thì $\{X_i\}$ gọi là độc lập tuyến tính trên (a,b).

3.3. Khái niệm về sự phụ thuộc tuyến tính

Chú ý rằng (*) tương đương với hệ

$$\begin{cases} \alpha_1 x_{11} + \alpha_2 x_{12} + \ldots + \alpha_n x_{1n} \equiv 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_1 x_{n1} + \alpha_2 x_{n2} + \ldots + \alpha_n x_{nn} \equiv 0 \end{cases}$$

Đây là hệ phương trình đại số thuần nhất đối với α_i. Để α_i không đồng thời bằng không

$$\Rightarrow W[X_1, X_2, \ldots, X_n] = \det\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \ldots\ldots & x_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots\ldots & \ldots \\ x_{n1} & x_{n2} & \ldots\ldots & x_{nn} \end{pmatrix} \equiv 0$$

$W[X_1, X_2, \ldots, X_n]$ gọi là định thức Wronski của $\{X_i\}$.

3.3. Khái niệm về sự phụ thuộc tuyến tính

Định lý 1:

Nếu n vector $\{X_i\}$ *phụ thuộc tuyến tính trên* (a,b) *thì* $W[X_1, X_2, ..., X_n] \equiv 0$ *trên khoảng đó.*

Tuy nhiên điều ngược lại không đúng. Chẳng hạn $X_1 = \begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix}$ $X_2 = \begin{pmatrix} t^2 \\ t^2 \end{pmatrix}$ ta có thể chứng minh theo định nghĩa X_1, X_2 độc lập tuyến tính nhưng $W[X_1, X_2] \equiv 0$.

Tuy nhiên ta có thể chứng minh rằng nếu $\{X_i\}$ là các nghiệm của phương trình $L(X) = 0$ thì điều ngược lại là đúng.

3.3. Khái niệm về sự phụ thuộc tuyến tính

Định lý 2:

Nếu $W[X_1,X_2,...,X_n]$ *của các nghiệm* $\{X_i\}$ *của hệ* $L(X)=0$ *triệt tiêu dù chỉ tại một điểm* $t=t_0\in(a,b)$ *liên tục của các hệ số của hệ phương trình thì* $\{X_i\}$ *sẽ phụ thuộc tuyến tính trong khoảng* (a,b) *và* $W[X_1,X_2,...,X_n]\equiv 0\quad \forall t\in(a,b)$.

Chứng minh

Chú ý mở đầu: Nếu $X(t)$ là nghiệm của $L(X)=0$ sao cho $X(t_0)=0$ với $t_0\in(a,b)$ thì $X(t)\equiv 0$ do tính chất duy nhất nghiệm (vì phương trình tồn tại nghiệm $X_0\equiv 0\ \forall t$).

Theo giả thiết $W[X_1,X_2,...,X_n]_{t=t_0}=\det\left(x_{ij}(t_0)\right)=0$.

Xét phương trình $C_1X_1(t_0)+C_2X_2(t_0)+...+C_nX_n(t_0)=0$

3.3. Khái niệm về sự phụ thuộc tuyến tính

Chứng minh

Phương trình tương đương với hệ $\begin{cases} C_1x_{11}(t_0)+C_2x_{12}(t_0)+\ldots+C_nx_{1n}(t_0)=0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ C_1x_{n1}(t_0)+C_2x_{n2}(t_0)+\ldots+C_nx_{nn}(t_0)=0 \end{cases}$

Do $\det\left(x_{ij}(t_0)\right)=0 \Rightarrow \exists$ các nghiệm C_i không đồng thời bằng không .

Xét biểu thức $X(t)=\sum C_iX_i(t)$ đây cũng là nghiệm của phương trình $L(X)=0$ (tính chất của toán tử L) và vì $X(t_0)=0 \Rightarrow$ theo tính chất duy nhất nghiệm $\Rightarrow X(t)\equiv 0 \quad \forall t\in(a,b)$ hay $\sum C_iX_i(t)\equiv 0 \quad \Rightarrow \{X_i\}$ phụ thuộc tuyến tính $\Rightarrow W[X_1,X_2,\ldots,X_n]\equiv 0 \quad \forall t\in(a,b)$ (đpcm).

Chú ý: *Từ định lý 1 và định lý 2 suy ra W của n nghiệm của hệ phương trình* $L(X)=0$ *hoặc đồng nhất bằng không hoặc khác không* $\forall t\in(a,b)$.

3.4. Hệ nghiệm cơ bản

Định nghĩa: *Hệ n nghiệm riêng độc lập tuyến tính $X_1(t), X_2(t),..., X_n(t)$ của hệ phương trình $L(X)=0$ được gọi là hệ nghiệm cơ bản của phương trình.*

Đối với hệ phương trình $L(X)=0$ luôn luôn $\exists$ hệ nghiệm cơ bản. Vì ta chỉ cần chọn n nghiệm riêng $\{X_i\}$ sao cho $W \neq 0$ tại một điểm $t_0 \in (a,b)$ khi đó $\Rightarrow \{X_i\}$ sẽ là một hệ nghiệm cơ bản.

Hệ nghiệm cơ bản $\{X_i\}$ mà sao cho $x_{ij}(t_0)=\delta_{ij}$ trong đó $\delta_{ij}=\begin{cases}0 & i\neq j\\ 1 & i=j\end{cases}$ (δ_{ij} ký hiệu Krôneke) gọi là hệ nghiệm CHUẨN TẮC.

3.4. Hệ nghiệm cơ bản

Định lý 3: *Nếu* $\{X_i\}$ *là hệ nghiệm cơ bản của hệ* $L(X)=0$ *thì nghiệm tổng quát của hệ phương trình là* $X=\sum_{i=1}^{n} C_i X_i$.

a) *Biểu thức* $X=\sum_{i=1}^{n} C_i X_i$ *là nghiệm*

b) *Từ hệ thức trên ta có thể giải ra các* C_i *điều này được suy từ* $W[X_1, X_2, ..., X_n] \neq 0$

3.4. Hệ nghiệm cơ bản

Chú ý: Công thức $\sum C_i X_i$ cho ta mọi nghiệm của phương trình . Giả sử tìm

nghiệm $X(t)$ sao cho $X(t_0) = X_0 = \begin{pmatrix} x_{10} \\ x_{20} \\ .. \\ x_{n0} \end{pmatrix}$.

Khi đó xét hệ $\begin{cases} C_1 x_{11}(t_0) + C_2 x_{12}(t_0) + \ldots + C_n x_{1n}(t_0) = x_{10} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ C_1 x_{n1}(t_0) + C_2 x_{n2}(t_0) + \ldots + C_n x_{nn}(t_0) = x_{n0} \end{cases}$

Do $\det\left(x_{ij}(t_0)\right) \neq 0 \Rightarrow$ tìm được C_i theo X_0.

§4. Hệ phương trình tuyến tính không thuần nhất

Xét hệ dạng $\dfrac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t)x_j + f_i$ (1)

Hay viết dưới dạng ma trận $\dfrac{dX}{dt} = A(t)X + F(t)$

4.1. Một số định lý về nghiệm

4.2. Phương pháp biến thiên hằng số

§4 Hệ phương trình tuyến tính không thuần nhất

4.1. Một số định lý về nghiệm

Xét hệ dạng $\dfrac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t)x_j + f_i$ (1)

Định lý 1:

Nếu $\overline{X}$ *là nghiệm của hệ phương trình tuyến tính không thuần nhất (1) còn* X_1 *là nghiệm của hệ* $L(X) = 0$ *tương ứng thì tổng* $\overline{X} + X_1$ *là nghiệm của (1).*

Định lý 2:

Nghiệm tổng quát X *của hệ phương trình tuyến tính không thuần nhất trên khoảng* (a,b) *(là khoảng liên tục của các hệ số* $a_{ij}(t)$ *và* $f_i(t)$*) bằng tổng của nghiệm tổng quát* $\sum_{i=1}^{n} C_i X_i$ *của hệ phương trình tuyến tính thuần nhất tương ứng và nghiệm riêng* $\overline{X}$ *của hệ không thuần nhất.*

$$X = \sum_{i=1}^{n} C_i X_i + \overline{X}$$

4.1. Một số định lý về nghiệm

Chứng minh:

Ta phải chứng minh hai điều:

a) Thoả mãn (1) $\forall C_i$ tuỳ ý điều này suy ra từ tính chất của L.

$$L[X]=L\left[\sum_{i=1}^{n}C_iX_i+\bar{X}\right]=\sum_{i=1}^{n}C_iL[X_i]+L[\bar{X}]=F(t)$$

b) Từ biểu thức $X=\sum_{i=1}^{n}C_iX_i+\bar{X}$ ta có thể giải ra các hằng số C_i.

Thật vậy ta có $\sum_{i=1}^{n}C_iX_i=X-\bar{X}$ khai triển ra đây là một hệ phương trình đại số tuyến tính đối với C_i và Krame của hệ là $W[X_1,X_2,...,X_n]\neq 0$.

4.1. Một số định lý về nghiệm

Chứng minh:

Ta chú ý rằng công thức $X = \sum_{i=1}^{n} C_i X_i + \bar{X}$ cho ta mọi nghiệm của phương trình (1). Để giải bài toán Côsi tìm nghiệm $X(t)$ sao cho tại $t = t_0$ thì $X(t_0) = X_0$ trong đó X_0 là vector tuỳ ý cho trước, ta phải chọn C_i sao cho

$$\sum_{i=1}^{n} C_i X_i(t_0) = X(t_0) - \bar{X}(t_0) = X_0 - \bar{X}(t_0).$$

Đây là hệ phương trình đại số tuyến tính đối với C_i và Krame $= W[X_1, X_2, ..., X_n] \neq 0$. Do đó tìm được duy nhất C_i thoả mãn bài toán Côsi.

4.1. Một số định lý về nghiệm

Định lý 3: (Nguyên lý chồng chất nghiệm)

Tổng $\sum_{i=1}^{n} X_i$ *của các nghiệm* X_i *của các hệ phương trình* $L[X] = F_i$ *là nghiệm*

của hệ $L[X] = \sum_{i=1}^{m} F_i$ *trong đó* $F_i = \begin{pmatrix} f_{1i}(t) \\ f_{2i}(t) \\ \dots \\ f_{ni}(t) \end{pmatrix}$

4.1. Một số định lý về nghiệm

Định lý 4: *Nếu hệ* $L[X]=U+iV$ *với các hệ số thực* $a_{ij}(t), u_i(t), v_i(t)$ *có nghiệm*

$X=\bar{U}+i\bar{V}$ *trong đó*

$$U=\begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \dots \\ u_n(t) \end{pmatrix} \quad \bar{U}=\begin{pmatrix} \bar{u}_1(t) \\ \bar{u}_2(t) \\ \dots \\ \bar{u}_n(t) \end{pmatrix} \quad V=\begin{pmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \\ \dots \\ v_n(t) \end{pmatrix} \quad \bar{V}=\begin{pmatrix} \bar{v}_1(t) \\ \bar{v}_2(t) \\ \dots \\ \bar{v}_n(t) \end{pmatrix}$$

thì $\bar{U}$ *và* $\bar{V}$ *sẽ là nghiệm tương ứng của hệ* $L[X]=U$ *và* $L[X]=V$

4.2. Phương pháp biến thiên hằng số

Xét hệ dạng $\dfrac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t)x_j + f_i$ (1)

Phương pháp gồm hai bước

Bước 1: Tìm hệ nghiệm cơ bản $X_1, X_2, ..., X_n$ của hệ thuần nhất tương ứng $\Rightarrow$

nghiệm tổng quát $X = \sum^{n} C_i X_i$ (2)

Bước 2: Xem $C_i = C_i(t)$ và chọn $C_i(t)$ sao cho biểu thức $\sum_{i=1}^{n} C_i(t)X_i$ thoả mãn

$L[X] = F(t)$

Vi phân (2) theo t ta được $\dfrac{dX}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \dfrac{dC_i(t)}{dt} X_i + \sum_{i=1}^{n} C_i(t)\dfrac{dX_i}{dt} =$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{dC_i(t)}{dt} X_i + A(t)\sum_{i=1}^{n} C_i(t)X_i \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \frac{dC_i(t)}{dt} X_i = \frac{dX}{dt} - A(t)\sum_{i=1}^{n} C_i(t)X_i = F(t) \quad (3)$$

4.2. Phương pháp biến thiên hằng số

(3) là phương trình vector tương đương với hệ

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} \dfrac{dC_i(t)}{dt} x_{1i} = f_1(t) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \sum_{i=1}^{n} \dfrac{dC_i(t)}{dt} x_{ni} = f_n(t) \end{cases} \qquad (4)$$

Crame $= W[X_1, X_2, ..., X_n] \neq 0 \Rightarrow$ giải ra duy nhất $\dfrac{dC_i(t)}{dt} = \phi_i(t)$

$\Rightarrow C_i = \int \phi_i(t)dt + \bar{C}_i$. Thay giá trị của các C_i vào (2) ta được

$$X = \sum_{i=1}^{n} \left(\int \phi_i(t)dt + \bar{C}_i \right) X_i \text{ hay } X = \sum_{i=1}^{n} \bar{C}_i X_i + \sum_{i=1}^{n} \left(\int \phi_i(t)dt \right) X_i .$$

Từ công thức trên ta thấy X là tổng của nghiệm tổng quát và một nghiệm riêng.

4.2. Phương pháp biến thiên hằng số

Ví dụ: Giải hệ $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y \\ \dfrac{dy}{dt} = -x + \dfrac{1}{\cos t} \end{cases}$ $F = \begin{pmatrix} 0 \\ \dfrac{1}{\cos t} \end{pmatrix}$

Bước 1: Xét phương trình $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y \\ \dfrac{dy}{dt} = -x \end{cases}$

$$\Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} + x = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{matrix} x = C_1 \cos t + C_2 \sin t \\ y = -C_1 \sin t + C_2 \cos t \end{matrix}$$

4.2. Phương pháp biến thiên hằng số

Ví dụ: Giải hệ $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y \\ \dfrac{dy}{dt} = -x + \dfrac{1}{\cos t} \end{cases}$ $\qquad F = \begin{pmatrix} 0 \\ \dfrac{1}{\cos t} \end{pmatrix}$

Bước 2: Xem $C_i = C_i(t)$ thay vào hệ ta được (thay trực tiếp)

$$\begin{cases} \dfrac{dC_1(t)}{dt}\cos t + \dfrac{dC_2(t)}{dt}\sin t = 0 \\ -\dfrac{dC_1(t)}{dt}\sin t + \dfrac{dC_2(t)}{dt}\cos t = \dfrac{1}{\cos t} \end{cases}$$

$$\Rightarrow C_1(t) = \ln|\cos t| + \overline{C}_1 \;;\; C_2(t) = t + \overline{C}_2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \overline{C}_1 \cos t + \overline{C}_2 \sin t + \cos t \ln|\cos t| + t\sin t \\ y = -\overline{C}_1 \sin t + \overline{C}_2 \cos t - \sin t \ln|\cos t| + t\cos t \end{cases}$$

§5. Hệ phương trình thuần nhất hệ số hằng số

5.1. Phương pháp giải

5.2. Ví dụ

§5 Hệ phương trình thuần nhất hệ số hằng số

5.1. Phương pháp giải

Thế các biểu thức (2) vào (1), ta được hệ phương trình đại số tuyến tính sau đây đối với $p_1, p_2, \ldots, p_n$:

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda) p_1 + a_{12} p_2 + \ldots + a_{1n} p_n = 0 \\ a_{21} p_1 + (a_{22} - \lambda) p_2 + \ldots + a_{2n} p_n = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1} p_1 + a_{n2} p_2 + \ldots + (a_{nn} - \lambda) p_n = 0 \end{cases} \qquad (3)$$

Đó là một hệ phương trình đại số tuyến tính thuần nhất, nó phải có nghiệm khác không, do đó định thức của ma trận các hệ số của nó phải bằng không.

§5 Hệ phương trình thuần nhất hệ số hằng số

5.1. Phương pháp giải

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \dots\dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \dots\dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots\dots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = 0 \qquad (4)$$

Phương trình (4) được gọi là phương trình đặc trưng của hệ (1), nó là một phương trình đại số bậc n đối với λ . Nghiệm của nó được gọi là giá trị riêng của hệ. Ta xét các trường hợp sau:

a) Phương trình đặc trưng (4) có n nghiệm thực đơn $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ khác nhau

b) Phương trình đặc trưng (4) có các nghiệm thực $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s$ lần lượt bội $l_1, l_2, \dots, l_s \quad (l_1 + l_2 + \dots + l_s = n)$.

c) Phương trình đặc trưng (4) có các nghiệm phức liên hợp

§5 Hệ phương trình thuần nhất hệ số hằng số

5.1. Phương pháp giải

a) Phương trình đặc trưng (4) có n nghiệm thực đơn $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ khác nhau.

Ứng với mỗi giá trị riêng λ_i ta xác định được một vector riêng tương ứng

$$P_i = \begin{pmatrix} p_{1i} \\ p_{2i} \\ \cdots \\ p_{ni} \end{pmatrix}$$

Khi ấy hệ phương trình vi phân (1) có n nghiệm $X_1, X_2, ..., X_n$

$$X_i = \begin{pmatrix} x_{1i} \\ x_{2i} \\ \cdots \\ x_{ni} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{1i}e^{\lambda_i t} \\ p_{2i}e^{\lambda_i t} \\ \cdots\cdot \\ p_{ni}e^{\lambda_i t} \end{pmatrix} \qquad (i = 1..n)$$

§5 Hệ phương trình thuần nhất hệ số hằng số

5.1. Phương pháp giải

a) Phương trình đặc trưng (4) có n nghiệm thực đơn $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ khác nhau.

Hệ đó được gọi là hệ nghiệm cơ bản. Khi đó nghiệm tổng quát của hệ (1) là

$X = \sum_{i=1}^{n} C_i X_i$ hay có thể viết

$$\begin{cases} x_1 = C_1 x_{11} + C_2 x_{12} + \dots + C_n x_{1n} \\ x_2 = C_1 x_{21} + C_2 x_{22} + \dots + C_n x_{2n} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_n = C_1 x_{n1} + C_2 x_{n2} + \dots + C_n x_{nn} \end{cases}$$

Ví dụ 1: Giải hệ $\begin{cases} x' = x + 2y \\ y' = 4x + 3y \end{cases}$

§5 Hệ phương trình thuần nhất hệ số hằng số

5.1. Phương pháp giải

Ví dụ 1: Giải hệ $\begin{cases} x' = x + 2y \\ y' = 4x + 3y \end{cases}$

Phương trình đặc trưng là $\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 4 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0$

hay $\lambda^2 - 4\lambda - 5 = 0$ có hai nghiệm $\lambda_1 = 5; \lambda_2 = -1$.
ứng với $\lambda_1 = 5$ hệ phương trình để xác định vectơ riêng là

$$\begin{cases} (1-5)p_1 + 2p_2 = 0 \\ 4p_1 + (3-5)p_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow 4p_1 - 2p_2 = 0.$$

Có thể lấy $p_1 = 1, p_2 = 2$. Vậy vectơ riêng ứng với $\lambda_1 = 5$ là $(1,2)$

Tương tự ta tìm được vector riêng ứng với $\lambda_2 = -1$ là $(1,-1)$.

Do đó nghiệm cơ bản của hệ là

$$x_1 = e^{5t} \qquad y_1 = 2e^{5t}$$
$$x_2 = e^{-t} \qquad y_2 = -e^{-t}$$

§5 Hệ phương trình thuần nhất hệ số hằng số

5.1. Phương pháp giải

Ví dụ 1: Giải hệ $\begin{cases} x' = x + 2y \\ y' = 4x + 3y \end{cases}$

Vậy nghiệm tổng quát của hệ phương trình đã cho là

$$x = C_1 e^{5t} + C_2 e^{-t}$$
$$y = 2C_1 e^{5t} - C_2 e^{-t}$$

§5 Hệ phương trình thuần nhất hệ số hằng số

5.1. Phương pháp giải

b) Phương trình đặc trưng (4) có các nghiệm thực $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s$ lần lượt bội $l_1, l_2, \ldots, l_s$ $\quad (l_1 + l_2 + \ldots + l_s = n)$.

Ta tìm nghiệm của hệ (1) dưới dạng

$$\begin{cases} x_1 = p_{11}(t)e^{\lambda_1 t} + p_{12}(t)e^{\lambda_2 t} + \ldots + p_{1s}(t)e^{\lambda_s t} \\ x_2 = p_{21}(t)e^{\lambda_1 t} + p_{22}(t)e^{\lambda_2 t} + \ldots + p_{2s}(t)e^{\lambda_s t} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n = p_{n1}(t)e^{\lambda_1 t} + p_{n2}(t)e^{\lambda_2 t} + \ldots + p_{ns}(t)e^{\lambda_s t} \end{cases}$$

Trong đó $p_{ij}(t)$ là các đa thức bậc $l_j - 1$ $\;(j = 1, 2, \ldots, s;\, i = 1, 2, \ldots, n)$ các hệ số của đa thức này phụ thuộc n hằng số tuỳ ý $C_1, C_2, \ldots, C_n$. Dựa vào hệ phương trình (1) có thể tìm được các hệ số đó bằng phương pháp hệ số bất định.

5.1. Phương pháp giải

§5 Hệ phương trình thuần nhất hệ số hằng số

b) Phương trình đặc trưng (4) có các nghiệm thực $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s$ lần lượt bội $l_1, l_2, \ldots, l_s$ $\quad (l_1 + l_2 + \ldots + l_s = n)$.

Ví dụ 2: Giải hệ $\begin{cases} x' = x - y \\ y' = x + 3y \end{cases}$

Phương trình đặc trưng là $\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0$

hay $\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$ có nghiệm kép $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$.

Do đó ta tìm nghiệm của hệ có dạng

$$x = (at + b)e^{2t}$$
$$y = (ct + d)e^{2t}$$

5.1. Phương pháp giải

§5 Hệ phương trình thuần nhất hệ số hằng số

Ví dụ 2: Giải hệ $\begin{cases} x' = x - y \\ y' = x + 3y \end{cases}$

thế vào hệ phương trình ta được

$$\begin{cases} 2at + 2b + a = (a-c)t + b - d \\ 2ct + 2d + c = (a+3c)t + (b+3d) \end{cases}$$

đồng nhất hệ số của các số hạng cùng bậc ta được

$$\begin{cases} 2a = a - c \\ 2b + a = b - d \\ 2c = a + 3c \\ 2d + c = b + 3d \end{cases}$$

Cho $a = C_1, b = C_2,\ C_1, C_2$ tuỳ ý ta được $c = -C_1, d = -(C_1 + C_2)$

Vậy nghiệm tổng quát là

$$x = (C_1 t + C_2)e^{2t}$$

$$y = -(C_1 t + C_1 + C_2)e^{2t}$$

5.1. Phương pháp giải

c) Phương trình đặc trưng (4) có các nghiệm phức liên hợp.

Muốn được nghiệm tổng quát của hệ phương trình (1) dưới dạng thực thì tương tự như phương trình vi phân tuyến tính thuần nhất cấp cao có hệ số không đổi ta dùng công thức Euler và lấy các nghiệm riêng là phần thực và phần ảo của nghiệm riêng phức tương ứng.

Ví dụ 3: Giải hệ $\begin{cases} x' = x - 5y \\ y' = 2x - y \end{cases}$

§5 Hệ phương trình thuần nhất hệ số hằng số

5.1. Phương pháp giải

Ví dụ 3: Giải hệ $\begin{cases} x' = x - 5y \\ y' = 2x - y \end{cases}$

Phương trình đặc trưng là $\begin{vmatrix} 1-\lambda & -5 \\ 2 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0$

hay $\lambda^2 + 9 = 0$ có nghiệm $\lambda_1 = 3i \quad \lambda_2 = -3i$

Véc tơ riêng ứng với $\lambda_1 = 3i$ là $(5, 1-3i)$. Do đó ta có nghiệm là

$$x_1 = 5e^{3it} = 5\cos 3t + i5\sin 3t$$

$$y_1 = (1-3i)e^{3it} = \left(\cos 3t + 3\sin 3t\right) + i(\sin 3t - 3\cos 3t)$$

Vậy nghiệm tổng quát của hệ đã cho là

$$x = 5C_1\cos 3t + 5C_2\sin 3t$$

$$y = C_1\left(\cos 3t + 3\sin 3t\right) + C_2\left(\sin 3t - 3\cos 3t\right)$$

5.2. Một số ví dụ tham khảo

Ví dụ 1: Giải hệ $\begin{cases} x' = x + 2y \\ y' = 4x + 3y \end{cases}$

Ví dụ 2: Giải hệ $\begin{cases} x' = x - y \\ y' = x + 3y \end{cases}$

Ví dụ 3: Giải hệ $\begin{cases} x' = x - 5y \\ y' = 2x - y \end{cases}$

Bài tập tham khảo chương 3- Hệ PTVP

1. $$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y - 5\cos t \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x + y \end{cases}$$

2. $$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x - y \\ \dfrac{dy}{dt} = 4y - x \end{cases}$$

3. $$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x - y + z \\ \dfrac{dy}{dt} = x + 2y - z \\ \dfrac{dz}{dt} = x - y + 2z \end{cases}$$

4. $$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} - 5x - 3y = 0 \\ \dfrac{dy}{dt} + 3x + y = 0 \end{cases}$$

5. $$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x + y \\ \dfrac{dy}{dt} = 4y - x \end{cases}$$

6. $$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x - y \\ \dfrac{dy}{dt} = 4y - x \end{cases}$$

7. $$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - 2y - z \\ \dfrac{dy}{dt} = y - x + z \\ \dfrac{dz}{dt} = x - z \end{cases}$$

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1]Hoàng Hữu Đường, Vừ Đức Tôn, Nguyễn Thế Hoàn, *Phương trình vi phân*, Tập 1, 2, Hà nội, NXB ĐH và THCN, 1970.

[2]Nguyễn Thế Hoàn, Trần Văn Nhung, *Bài tập Phương trình vi phân*, NXB ĐH và THCN, 1979.

[3]Nguyễn Thế Hoàn, Phạm Phu, *Cơ sở Phương trình vi phân và lý thuyết ổn định*, NXB Giáo dục, 2003.

[4]Nguyễn Đình Trí, Tạ Văn Đĩnh, Nguyễn Hồ Quỳnh, *Toán học cao cấp*, Tập 3, NXB Giáo dục, 2002.